بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه (۲)

سال سوم آموزش متوسطه

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری**

نام کتاب : **هندسه (۲) ـ ۲۵۸/۴**

مؤلفان :

فصلهای ۱، ۲و۳ : **جواد حاجی‌بابایی، محمّدهاشم رستمی، بیژن ظهوری‌زنگنه، سهیلا غلام‌آزاد، زهرا گویا و جعفر نیوشا**

فصل۴ : **بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروجردیان، عزیزه رحمانی، محمّدهاشم رستمی، اسدالله رضوی، بیژن ظهوری زنگنه، زهرا گویا و مرتضی میرمحمدرضایی**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت: **www.chap.sch.ir**

رسام : **هدیه بندار**

صفحه‌آرا :**خدیجه محمدی**

طراح جلد :**علیرضا رضائی‌کُر**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (دارو پخش)**

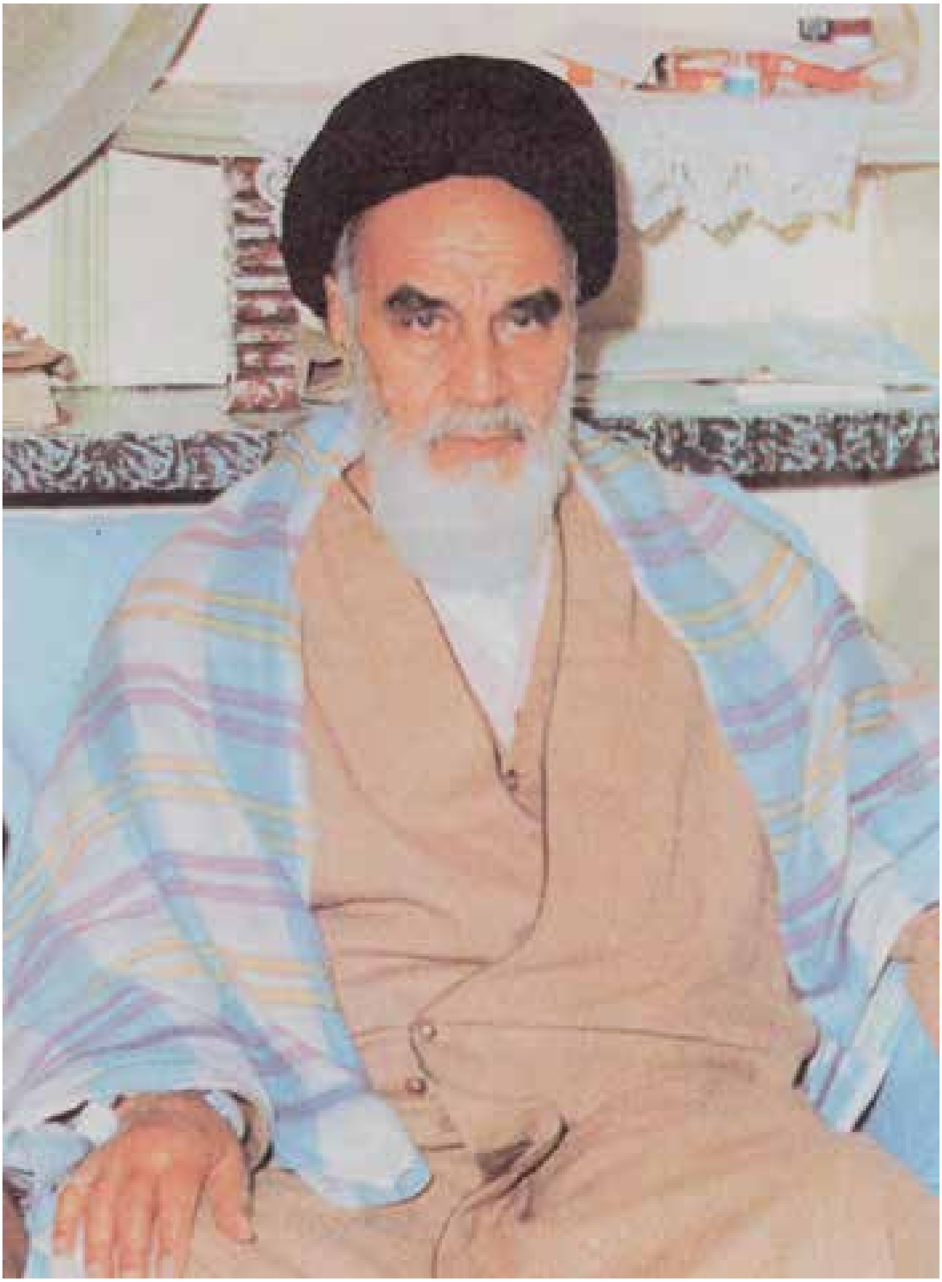
تلفن: ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران«سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ هفدهم ۱۳۹۲**

ISBN 964-05-1297-4 شابک ۴-۱۲۹۷-۰۵-۹۶۴

۱۳۹۲



باید شما (معلمان) اینها (دانش‌آموزان) را از آن طبیعت منحطی که انسان را به انحطاط می‌کشد، آن حب جاه و حب مال و حب منصب احتراز دهید. اینها را از آن چیزهایی که خارِ راهِ انسان هستند، مانع ترقی انسان هستند احتراز بدهید ... شما باید به اینها بفهمانید که زندگی شرافتمندانه، زندگی است.

فهرست

وَإِذْ قَالَ إِبْرَٰهِيمُ رَبِّ أَرِنِي كَيْفَ تُحْيِ ٱلْمَوْتَىٰ قَالَ أَوَلَمْ تُؤْمِن صلى قَالَ بَلَىٰ وَلَٰكِن لِّيَطْمَئِنَّ قَلْبِي صلى
قَالَ فَخُذْ أَرْبَعَةً مِّنَ ٱلطَّيْرِ فَصُرْهُنَّ إِلَيْكَ ثُمَّ ٱجْعَلْ عَلَىٰ كُلِّ جَبَلٍ مِّنْهُنَّ جُزْءًا ثُمَّ ٱدْعُهُنَّ يَأْتِينَكَ سَعْيًا ج وَٱعْلَمْ
أَنَّ ٱللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٌ

و به (خاطر بیاور) هنگامی را که ابراهیم گفت : «خدایا! به من نشان بده چگونه مردگان را زنده می‌کنی؟» فرمود : «مگر ایمان نیاورده‌ای؟!» عرض کرد : «آری، ولی می‌خواهم قلبم آرامش یابد.» فرمود : «در این صورت، چهار نوع از مرغان را انتخاب کن! و آنها را (پس از ذبح کردن)، قطعه‌قطعه کن (و در هم بیامیز)! سپس بر هر کوهی، قسمتی از آن را قرار بده، بعد آنها را بخوان، به سرعت به سوی تو می‌آیند! و بدان خداوند قادر و حکیم است : (هم از ذرّاتِ بدن مردگان آگاه است، و هم توانایی بر جمع آنها دارد)».

سورهٔ بقره ـــ آیه ۲۶۰

سخنی با خوانندگان

انسان برای رسیدن به **اطمینان قلبی** در مورد درستی بسیاری از مفاهیم مجرّد به درک شهودی و تجربی نیازمند است. ریاضی نیز به عنوان یک تلاش انسانی و یک جریان طبیعی تفکّر بشری، همچنان که پولیا می‌گوید «دارای دو جنبه است، یکی ساختار شهودی و تجربی ریاضی و دیگری ساختار مجرد آن.» دانش‌آموزان برای درک و پذیرش اثبات و اطمینان یافتن از درستی یک مطلب ریاضی، نیاز به تقویت شهود و رسیدن به استدلال **محتمل**[1] از طریق تجربه و آزمایش را دارند تا زمینه‌های لازم برای درک تجریدی آنها فراهم شود. همانطور که **۷۵** ریاضیدان نامی در بیانیهٔ **۱۹۶۲** خود اظهار داشتند، «تفکّر ریاضی تنها استدلال استنتاجی نیست، همچنین اثبات صوری صرف هم نمی‌باشد. فرآیندهای ذهنی و فکری که اثبات و چگونگی اثبات را ارائه می‌کند همانند خود اثبات که نتیجهٔ تفکر ریاضی است بخشی از تفکر ریاضی محسوب می‌شود. استخراج مفاهیم درست از وضعیت‌های محسوس و ملموس، تعمیم از حالتهای مشهود، استدلال استقرایی، استدلال از طریق تمثیل و زمینه‌های شهودی که برای آشکار کردن یک حدسیّه به کار می‌روند، همگی سبک و طریقهٔ ریاضی گونهِ تفکّر است. در واقع، بدون تجربه‌های ناشی از این گونه فرآیندهای غیر رسمی تفکّر، دانش‌آموزان نمی‌توانند نقش صحیح نمادها و فرمولها و اثباتهای خشک و صوری را درک کنند.»

به همین علت است که حدسیّه‌سازی که نتیجهٔ حدس زدن یا **استدلال محتمل** می‌باشد، باید با برنامهٔ هندسهٔ دبیرستان تلفیق گردد. معمولاً حدسیه‌ها با عبارتهای **همه، هر** یا **برای هر** به جای **بعضی، چند تا** و **وجود دارد،** شروع می‌شوند. حدسیه‌ها دربارهٔ مجموعه‌هایی شامل یک تعداد نامتناهی از اشیا هستند، پس امکان آزمایش تمام

۱ـــ Plausible reasoning

حالتها و اثبات یک حدسیّه به وسیلهٔ استدلال استقرایی وجود ندارد. در نتیجه، تنها راه تعیین قطعی درستی یا نادرستی یک حدسیّه، استفاده از استدلال استنتاجی است. در همین راستا، درس هندسه باید برای دانش‌آموزان فرصتهای مناسبی ایجاد کند تا **حدس زدن** از روی آگاهی را یاد بگیرند، حدسها را به آزمایش بگذارند، براساس الگوهایی که از نتیجهٔ حدسها به دست می‌آورند حدسیّه‌سازی کنند و سپس به وسیلهٔ استدلال استنتاجی، در مورد درستی یا نادرستی حدسیّه خود تصمیم قطعی بگیرند. به همین دلیل، فعالیتهای کتاب طوری تنظیم شده‌اند تا چنین فرصتهایی را ــ هر چند اندک ــ فراهم آورند. گاهی فعالیتها دربارهٔ قسمتهایی از هندسه است که دانش‌آموزان قبلاً درستی یا نادرستی آنها را شنیده‌اند و ممکن است که ظاهراً نتیجهٔ فعالیت برای آنها هیجانی نداشته باشد. امّا انجام آنها همان **اطمینان قلبی** است که نیاز هر انسان جستجوگر و خلّاق است. از نظر مؤلفان، با پرورش درک شهودی توسط این فعالیتها، دانش‌آموزان در درک اثباتهای دقیق و توسعهٔ تفکّر تجریدی که غایت یادگیری ریاضی است، تواناتر می‌شوند، همانطور که پولیا می‌گوید : **سعی کنید آنچه را که شهودی به نظر می‌رسد، به طور رسمی و دقیق اثبات کنید و آنچه را که به طور رسمی و دقیق اثبات کرده‌اید، به طور شهودی درک کنید. این یک ورزش مغزی جالب است.** چنین فعالیتهایی، ضرورتِ داشتن شهود قوی، بها دادن به نتیجه‌های تجربی، حدس زدن براساس آنها و سپس توسّل به استدلال دقیق برای تصمیم قطعی در مورد درستی یا نادرستی حدسیّه‌ها را به دانش‌آموزان نشان می‌دهد. دانش‌آموزان برای دفاع از استدلالهای خود در گروههای کوچک، پیوسته دانش هندسی خود را افزایش می‌دهند و اعتماد به نفس آنها در مورد توان یادگیری و تولید ریاضی خودشان بیشتر می‌شود. امیدواریم دانش‌آموزان با چگونگی تولید و خلق ریاضی توسط ریاضیدانهای نامی آشنا شوند و بدانند که آن بزرگان نیز با فرآیند حدس زدن، تجربه کردن، حدسیّه‌سازی و سپس استدلال استنتاجی، ریاضیاتی را تولید کرده‌اند که بدون آنها، تصور زندگی در زمان فعلی بعید به نظر می‌رسد. دانش‌آموزان باید بدانند که دیگر نمی‌توانند تنها دریافت کنندگان منفعل دانشِ تولید شده توسط دیگران باشند. در نتیجه، برنامهٔ درسی و کتاب درسی هندسه باید به گونه‌ای تهیّه شود تا بتوان «از دانش‌آموزان انتظار داشت که نقش فعّالی در توسعهٔ دانش ریاضی خود داشته باشند»[1].

ارتباط و اتصال بین مقوله‌های مختلف ریاضی و بین ریاضی، مقوله‌های خارج از آن یعنی وحدت درونی و بیرونی ریاضی، به فعّال‌تر کردن دانش‌آموزان در جریان یادگیری هندسه که بخشی از ریاضی است کمک مؤثری می‌کند. هماهنگی درونی در هندسه باید به گونه‌ای باشد تا بتوان از ابزارهای گوناگون آن برای استدلال کردن سود جست. هندسهٔ ترکیبی، هندسهٔ تحلیلی و هندسهٔ محاسباتی، همگی بخشهای مختلف هندسه هستند و دلیلی بر محدود شدن به یکی از گونه‌های آن وجود ندارد. در استدلالهای هندسهٔ ترکیبی، نه تنها ابزارهای موجود در آن مورد استفاده قرار می‌گیرند، بلکه هر جا مناسب باشد، می‌توان هندسهٔ تحلیلی را به کمک گرفت و از نگرشهای تبدیلی و مختصاتی نیز سود برد. برای نمونه، چون دانش‌آموزان دستگاه مختصات و معادلهٔ خط را در سالهای گذشته مطالعه کرده‌اند، بنابراین می‌توانند از این دانش قبلی در اثبات قضیه‌ها استفاده کنند.

همچنان که ارتباط درونی در هندسه به توسعهٔ مفهومها کمک می‌کند، ارتباط بیرونی آن یعنی پیوند هندسه

۱ــ هاوسون، ۱۹۹۵

با دنیای واقعی و با مقوله‌های دیگر درسی نیز در ایجاد انگیزه، علاقه‌مندی و افزایش قدرت ریاضی دانش‌آموزان، مؤثّر و ضروری است. همانگونه که در هندسه ۱ یادآور شدیم، از همکاران عزیز استدعا داریم که امکان انجام فعالیتها در کلاس در قالب **گروههای کوچک** را فراهم آورند تا روح مشارکت و همکاری در آنها تقویت شود. ممکن است در ابتدای کار، این روند، به دلیل کم رنگ بودن زمینهٔ مشارکت در کلاسهای درس، از نظر زمانی وقت‌گیر باشد. امّا تحقیقات متعدّد نشان می‌دهند که با پیش گرفتن این روند، در زمانی نه چندان طولانی، روحیهٔ کار گروهی در کلاس ایجاد شده و پس از آن، زمان به ظاهر از دست رفته را می‌توان به سرعت جبران کرد. به‌علاوه، با انجام چنین فعالیتهایی، دانش‌آموزان به اندازهٔ کافی برای انجام مسأله‌های پایان هر بخش توانمند شده و حل آنها وقت کمتری را به خود اختصاص خواهد داد. همچنین ذکر این نکته ضروری است که ارزشیابی باید به طور مستمر صورت بگیرد و جلوه‌های مختلف توانایی دانش‌آموزان از جمله قابلیت ارائهٔ استدلال شفاهی در نظر گرفته شود. لازمهٔ استدلال شفاهی، داشتن درک عمیق است، در نتیجه، دانش‌آموزانی که توانایی استدلال شفاهی را پیدا می‌کنند، حتماً از درجهٔ بالاتری از درک و فهم موضوع برخوردار شده‌اند، همکاران گرامی می‌توانند کیفیتهای یادگیری دانش‌آموزان از جمله میزان داشتن روحیهٔ مشارکت در فعالیتهای فکری کلاس درس، تلاش برای انجام فعالیتها، پرسشهای خوب و بجا که نشان‌دهندهٔ جستجوگری، خلاقیت و دقت نظر است، پاسخ به سؤالهای طرح شده از طرف معلم و سایر دانش‌آموزان و توانایی دفاع از حدسها و پیشنهادهای آنها را به عنوان بخشهایی از ۵ نمرهٔ ارزشیابی کلاسی به حساب آورند. در امتحانهای پایان نیمسال تحصیلی، تأکید بر به‌کار بردن روشهای مختلف استدلال، توانایی حل مسأله و به‌کارگیری مفهومها، تعریفها و قضیه‌های کتاب ضروری است.

مؤلفان وظیفهٔ خود می‌دانند از اعضای محترم شورای ریاضیِ دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی و خانم حمیده داریوش همدانی و آقای روح‌الله جهانی‌پور که ما را در برنامه‌ریزی و تدوین کتاب یاری داده‌اند تشکر کنند. همچنین از همکاران واحد فنی ادارهٔ کل چاپ و توزیع کتابهای درسی که با تلاش مستمر در آماده‌سازی به موقع کتاب کوشش کرده‌اند، صمیمانه قدردانی نمایند.

در پایان از همکاران گرامی استدعا می‌شود که پس از بررسی و تدریس کتاب، اظهار نظرهای موشکافانه و سازندهٔ خود را برای ما ارسال نمایند. قبلاً از حسن توجّه همکاران ارجمند صمیمانه تشکر می‌شود.

مؤلفان

معلّمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را در بارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطهٔ نظری

فصل ۱

استدلال در هندسه



تصویر مجسمهٔ «متفکّر» اثر رُودَن، مجسمه‌ساز فرانسوی (۱۹۱۷ ــ ۱۸۴۰)

۱ــ۱ــ استدلال استقرایی

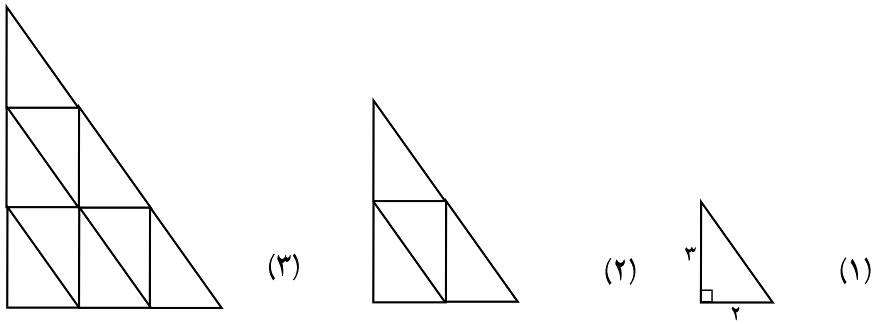
وقتی بیماری به پزشک مراجعه می‌کند، پزشک با استفاده از تجربهٔ خود، حدسهایی دربارهٔ نوع بیماری می‌زند. با این حال، او برای تشخیص قطعی بیماری، تنها به احساس تجربی خود اکتفا نمی‌کند و با انجام آزمایشهای متعدد و مشاهدهٔ علامتهای مختلف، در مورد نوع بیماری و روش درمان تصمیم نهایی را می‌گیرد. به این ترتیب، پزشک با مشاهده، جمع‌آوری اطلاعات از طریق آزمایش و اندازه‌گیری و دیدن نظمی در آنها، بیماری را تشخیص می‌دهد و راههای درمان را پیش می‌گیرد.

روش استدلال در مسائل پزشکی و علوم تجربی، استقرایی است. در ریاضی نیز از استدلال

استقرایی به عنوان یک استراتژی خوب حل مسأله استفاده می‌شود. در چنین روشی، نخست حدس می‌زنیم، سپس حدسهای خود را دقیق و دقیقتر می‌کنیم، آنگاه برای نتیجه‌گیری کلّی، با استفاده از استدلال استنتاجی، به‌طور قطع و یقین، دربارهٔ درستی آن حکم می‌کنیم.

فعالیت ۱ــ۱

مثلثهای شکلهای ۱ ، ۲ و ۳ با هم متشابه و مثلثهای کوچک همه با هم همنهشت هستند.



۱ــ تعداد مثلثهای کوچک هر شکل را تعیین و سپس جدول زیر را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد مثلثهای کوچک			

۲ــ رسم مثلثهای متشابه را تا پنجمین شکل ادامه دهید. در شکل پنجم چند مثلث کوچک جا می‌گیرد؟ جدول خود را تا شکل پنجم کامل کنید.

۳ــ در شکل دهم چند مثلث کوچک جا می‌گیرد؟ آیا رابطه‌ای بین شمارهٔ شکل و تعداد مثلثهای کوچک وجود دارد؟ توضیح دهید.

۴ــ در مورد شکل پانصدم چه حدسی می‌زنید؟

۵ ــ در حالت کلی حدس شما چیست؟

۶ــ آیا می‌توانید درستی حدس خود را در مورد شکل هزارم توجیه کنید؟

در این فعالیت برای بررسی رابطهٔ بین شمارهٔ شکل و تعداد مثلثهای کوچک در هر شکل، چندین مرحله را آزمایش و بررسی کردیم و سپس جدولی از اطلاعات به‌دست آمده را تنظیم نمودیم. آنگاه با دیدن نظمی در اطّلاعات به دست آمده، در مورد رابطهٔ بین شمارهٔ شکلها و تعداد مثلثهای

کوچک در هر شکل حدسی زدیم.

این فعالیت، نمونه‌ای از به کاربردن روش استدلال استقرایی برای رسیدن به یک حدس کلی است.

فعالیت ۱ــ۲

۱ــ مثلث دلخواهی را درنظر بگیرید :

الف) نیمسازهای زاویه‌های داخلی این مثلث را رسم کنید. این نیمسازها نسبت به هم چه وضعی دارند؟

ب) بند (الف) را در مورد چند مثلث دیگر تحقیق کنید.

پ) از دو بند بالا چه نتیجه‌ای را پیش‌بینی می‌کنید؟

۲ــ الف) عمودمنصف‌های ضلعهای مثلث دلخواهی را رسم کنید. عمودمنصف‌ها نسبت به هم چه وضعی دارند؟

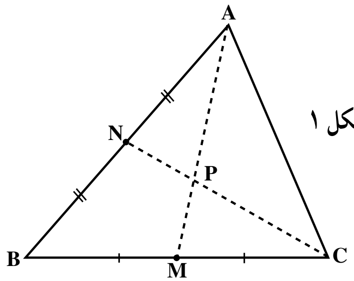
ب) بند (الف) را در مورد چند مثلث دیگر تحقیق کنید.

پ) با توجه به دو بند بالا، در حالت کلی چه حدسی می‌زنید؟ یعنی حدس شما برای وضعیّت عمودمنصف‌های ضلعهای هر مثلث دلخواه نسبت به هم چیست؟

نیمسازها، میانه‌ها و ارتفاعهای یک مثلث از ویژگیهای جالبی برخوردارند. فعالیت بعدی به شما فرصت می‌دهد تا یکی از این ویژگیها را در مورد میانه‌ها تحقیق کنید.

فعالیت ۱ــ۳

الف) مثلث دلخواه ABC را درنظر بگیرید و میانه‌های نظیر ضلعهای AB و BC را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را P بنامید (مانند شکل ۱).



شکل ۱

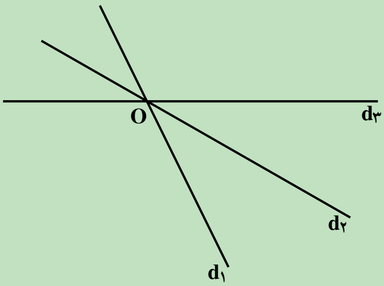
ب) با اندازه‌گیری طول پاره‌خطهای AP و PM، نسبتهای $\frac{AP}{AM}$ و $\frac{PM}{AM}$ را به‌دست آورید.

پ) با اندازه‌گیری طول پاره‌خطهای CP و PN، نسبتهای $\frac{CP}{CN}$ و $\frac{PN}{CN}$ را تعیین کنید.

ت) با توجّه به نتیجه‌های به‌دست آمده از بندهای (ب) و (پ) چه حدسی می‌زنید؟
ث) میانهٔ نظیر ضلع AC را رسم کنید. سه میانهٔ مثلث ABC چه وضعی نسبت به هم دارند؟
ج) چند مثلث دیگر رسم کنید و بندهای (الف) تا (ث) را در مورد آنها تحقیق نمایید.

خطهای همرس

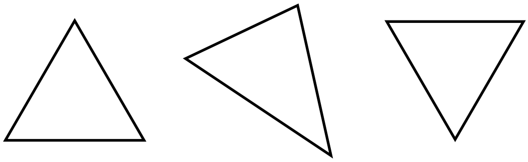
هرگاه چند خط فقط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند، **همرَس** نامیده می‌شوند.



با انجام سه فعالیت بالا، نتیجه‌های جالبی به‌دست آوردید. امّا می‌دانید که این نتیجه‌ها قابل استناد نیستند زیرا فقط براساس استدلال استقرایی حاصل شده‌اند.

فعالیت ۱ــ۴

۱ــ سه ارتفاع هر یک از مثلثهای زیر را رسم کنید.



الف) نقطهٔ همرسی ارتفاعها نسبت به مثلثها چه وضعی دارند؟
ب) حدس شما دربارهٔ نقطهٔ همرسی ارتفاعهای هر مثلث دلخواه چیست؟
پ) حدس خود را در مورد مثلثی به ضلعهای ۴ ، ۵ و ۶ آزمایش کنید. آیا این آزمایش حدس قبلی شما را تأیید می‌کند؟

۲ــ مثلثی به ضلعهای ۶، ۸ و ۱۲، و سه ارتفاع آن را رسم کنید.
الف) نقطهٔ همرسی ارتفاعهای این مثلث در کجا قرار می‌گیرد؟
ب) آیا حدس شما دربارهٔ نقطهٔ همرسی ارتفاعهای مثلث تأیید شد؟

پ) با توجّه به بندهای الف و ب، حدس شما در مورد محل همرَسی ارتفاعها در هر مثلث دلخواه چیست؟

۳ــ یک مثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواه رسم کنید. سپس ارتفاعهای آن‌را رسم نمایید.

الف) نقطهٔ همرَسی ارتفاعها کجا قرار دارد؟

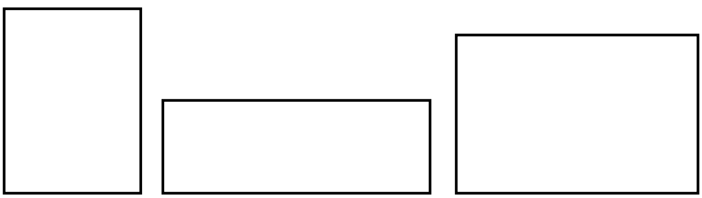
ب) حدس شما در مورد محل نقطهٔ همرسی ارتفاعها در هر مثلث تأیید یا رد شد؟ چرا؟ توضیح دهید.

تمرین ــ وسط ضلعهای یک چهارضلعی دلخواه را به‌طور متوالی به هم وصل کنید و با استفاده از استدلال استقرایی، ویژگیهای شکل حاصل را بررسی نمایید. اگر چهارضلعی اوّلیه مستطیل، مربع، لوزی یا متوازی‌الاضلاع باشد، حدس شما دربارهٔ ویژگی چهارضلعی پدید آمده از وصل کردن وسطهای ضلعهای آنها چیست؟ چرا؟

فعالیت ۱ــ ۵

اگر نیمسازهای زاویه‌های یک مربع را رسم کنیم، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند (آزمایش کنید!) زیرا در مربع، قطرها نیمساز زاویه‌ها هستند. حال اگر به جای مربع یک مستطیل در نظر بگیریم، وضعیت نیمسازها چگونه خواهد شد؟ در این فعالیت، به بررسی این سؤال می‌پردازیم.

الف) در زیر سه مستطیل رسم شده است :

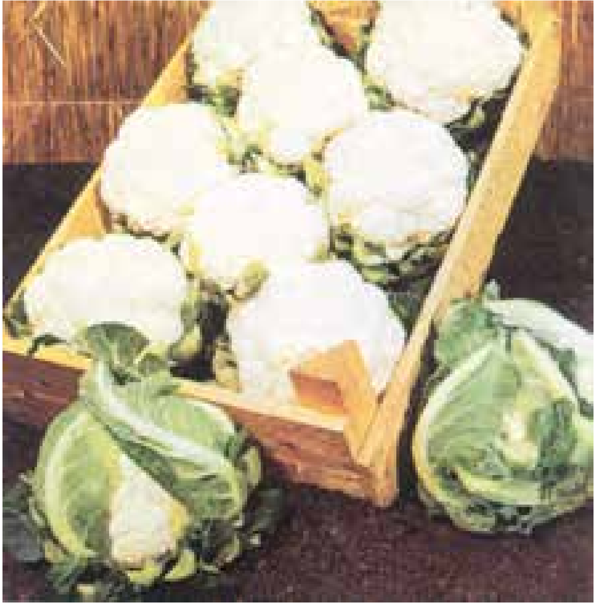


(۱) (۲) (۳)

نیمسازهای زاویه‌های داخلی هریک را رسم کرده، ویژگیهای شکل پدید آمده از برخورد نیمسازها را با اندازه‌گیری (با خط‌کش و نقاله) در جدولی یادداشت کنید.

ب) براساس این سه تجربه، در مورد شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مستطیل چه حدسی می‌زنید؟

پ) مستطیل دلخواه دیگری رسم کنید و درستی حدس خود را تحقیق نمایید.



آیا تا به حال به شباهت قسمتهای مختلف گل کلم و خود آن توجّه کرده‌اید؟ اگر از یک تکه گل‌کلم عکس بگیرید و آن‌را بزرگ کنید، تصویر حاصل تقریباً فرقی با خود گل کلم ندارد! یعنی هر تکه گل‌کلم شبیه کلّ آن است. تشابه که یکی از پرکاربردترین مفهومهای هندسی است، در پدیده‌های طبیعی بسیار مشاهده می‌شود. ویژگی این‌گونه پدیده‌ها خود ـ متشابه بودن آنها است.

اگر قسمتی از یک شکل با کل شکل متشابه باشد، آن شکل **خود ـ متشابه** نامیده می‌شود.

فعالیت ۱ـ۶

یک مثلث متساوی‌الاضلاع در نظر بگیرید.

دستور ترسیم:

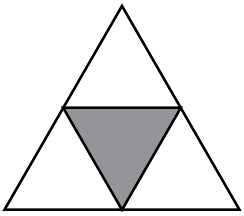
الف) وسط ضلعها را همانطورکه نشان داده شده است به هم وصل کنید.

ب) سه مثلثی را که در گوشه‌ها ایجاد می‌شوند، نگه دارید و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف کنید.

۱ـ این فرآیند را روی سه مثلث جدید تکرار کنید. به این ترتیب ۹ مثلث همنهشت تولید می‌شود.

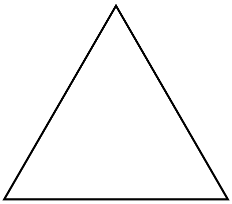
۲ــ فرآیند بالا را تا سه مرحلهٔ دیگر، تکرار کنید.

۳ــ شکلی را که از تکرار این فرآیند ایجاد می‌شود در ذهن خود مجسم کنید و آن‌را توصیف نمایید. چنین شکلی **مثلث سِرپینسکی** نامیده می‌شود.

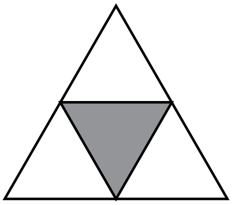


فعالیت ۱ــ۷

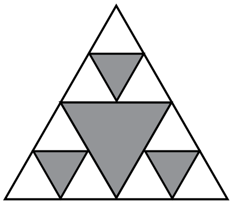
چهار مرحلهٔ اول رسم مثلث سرپینسکی در زیر نشان داده شده است. مرحله‌های بعدی، با تقسیم مثلثها به مثلثهای کوچکتر ادامه پیدا می‌کند.



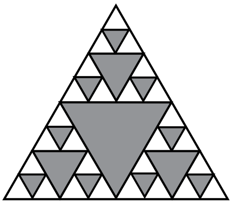
مرحله ۰



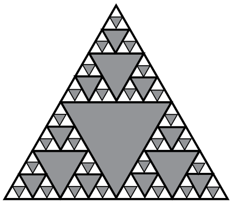
مرحله ۱



مرحله ۲



مرحله ۳



مرحله ۴

۱. تعداد مثلثهای جدیدی را که در هریک از مراحل ۱ تا ۴ ایجاد شده‌اند، بشمارید و در جدول زیر یادداشت کنید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
تعداد	۱							

۲. در مورد تعداد مثلثها در مرحلهٔ ۵ چه حدسی می‌زنید؟ در هر مرحله، تعداد مثلثها چگونه تغییر می‌کند؟

۳. برای یافتن تعداد مثلثها در مرحلهٔ n، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟

۴. اگر n بزرگ و بزرگتر شود، تعداد مثلثها چگونه تغییر می‌کند؟

۵ . اگر مساحت مثلث در مرحلهٔ صفر برابر ۱ باشد، مساحت باقی‌مانده را در مرحله‌های ۱ تا ۴ به‌دست آورید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
مساحت	۱							

۶. در مورد مساحت باقی‌مانده در مرحلهٔ ۵، چه حدسی می‌زنید؟

۷. در هر مرحله مساحت باقی‌مانده‌چگونه تغییر می‌کند؟

۸. برای یافتن مساحت باقی‌مانده در مرحلهٔ n، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟

۹. اگر n بزرگ و بزرگتر شود، مساحت مثلثهای باقی‌مانده چگونه تغییر می‌کند؟

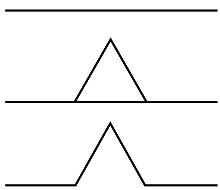
فعالیت ۱ــ۸

دستور ترسیم زیر را درنظر بگیرید :

الف) پاره‌خط را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید ؛

ب) روی قسمت میانی، یک مثلث متساوی‌الاضلاع بنا کنید ؛

پ) پاره‌خط میانی را حذف کنید.



۱. یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کنید.

۲. دستور ترسیم را بر روی هریک از ضلعهای مثلث اجرا نمایید. توجه کنید که در این حالت، هر پاره‌خط به چهار پاره‌خط کوچکتر با طولهای مساوی تبدیل می‌شود.

۳. دستور فوق را در دو مرحلهٔ دیگر، روی هریک از پاره‌خطهای ایجاد شده تکرار کنید.

۴. تعداد پاره‌خطهای ایجاد شده در مرحله‌های ۱ تا ۳ را بشمارید و در جدول زیر یادداشت نمایید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد پاره‌خطها	۳	۱۲					

۵. در مورد تعداد پاره‌خطها در مرحلهٔ ۴ چه حدسی می‌زنید؟ در هر مرحله تعداد پاره‌خطها چگونه تغییر می‌کند؟

۶. برای یافتن تعداد پاره‌خطها در مرحلهٔ n، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟

۷. اگر n بزرگ و بزرگتر شود، تعداد پاره‌خطها چگونه تغییر می‌کند؟

۸. اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع در مرحلهٔ صفر برابر ۱ باشد، محیط شکل حاصل در مرحله‌های ۲،۱ و ۳ را به‌دست آورید و در جدول زیر یادداشت کنید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
محیط	۳						

۹. حدس شما در مورد محیط شکل در مرحلهٔ ۴ چیست؟ محیط شکل در هر مرحله با چه ضریبی تغییر می‌کند؟

۱۰. برای یافتن محیط شکل در مرحلهٔ n، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟

۱۱. اگر n بزرگ و بزرگتر شود، محیط شکل حاصل چگونه تغییر می‌کند؟

اگر دستور فوق روی ضلعهای مثلث تا بینهایت تکرار شود شکلی به نام **برف دانهٔ کُخ** ایجاد می‌شود. نکتهٔ شگفت آور در مورد این شکل آن است که با وجود سطح محدود، محیط آن از هر عدد بزرگی بزرگتر می‌شود، تا جایی که گفته می‌شود محیط این شکل به بینهایت میل می‌کند.

در فعالیت زیر، با استفاده از استراتژی **تغییردیدگاه**، به بررسی مثالی از استدلال استقرایی بپردازید.

فعالیت ۱ـــ۹

هرگاه دو رأس غیرمجاور در یک چندضلعی محدّب به وسیلهٔ یک پاره‌خط به هم وصل شود، یک قطر از آن چندضلعی به‌دست می‌آید.

الف) چند ضلعیهای محدّب را تا هشت‌ضلعی رسم کنید.

ب) قطرهای هریک از این چندضلعیها را رسم کنید و جدول زیر را کامل نمایید.

جدول ۱

تعداد ضلعها	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد قطرها	۰	۲	۵			

پ) آیا رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطرها وجود دارد؟

همانطور که تجربه کردید، به‌سادگی نمی‌توان رابطه‌ای بین داده‌های جدول ۱ پیدا کرد تا به شما در پیدا کردن الگویی برای پیش‌بینی رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطرهای چندضلعیها در هر

مرحله، که هدف این فعالیت بود، کمک کند. بنابراین دیدگاه خود را تغییر دهید و به جمع‌آوری داده‌های متفاوت برای رسیدن به هدف این فعالیت و حل این مسأله بپردازید.

ت) جدول ۲ را تکمیل کنید :

جدول ۲

تعداد ضلعها	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد قطرهای رسم شده از یک رأس	۰	۱				

ث) در چندضلعیهای جدول ۲، آیا رابطه‌ای بین **تعداد ضلعها** و **تعداد قطرهای رسم شده از یک رأس** وجود دارد؟

ج) آیا می‌توانید رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطرهایی که از تمام رأسهای چندضلعیهای صفحهٔ قبل رسم می‌شوند، حدس بزنید؟

چ) آیا رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطرهای رسم شده از هر رأس یک **n ضلعی** وجود دارد؟

ح) اگر در قسمت (چ) رابطه‌ای پیدا کردید، آیا می‌توانید با استفاده از آن،رابطهٔ بین تعداد ضلعها و تعداد قطرهایی که از تمام رأسهای یک **nضلعی** می‌گذرند را حدس بزنید؟

خ) چگونه **استراتژی تغییر دیدگاه** به شما کمک کرد تا رابطه‌ای برای تعیین تعداد قطرهای چندضلعیها به‌دست آورید؟

مسأله‌ها

۱. با استفاده از استدلال استقرایی، رابطه‌ای که مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدّب را بیان می‌کند حدس بزنید و مراحل انجام کار را توضیح دهید.

۲. با استفاده از استدلال استقرایی، ویژگیهای شکل حاصل از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع را پیش‌بینی کنید و چگونگی رسیدن به حدسهای خود را توضیح دهید.

۳. در مسأله قبل به جای متوازی‌الاضلاع یک ذوزنقه متساوی‌الساقین در نظر می‌گیریم. چه حدسی در مورد شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن می‌زنید؟

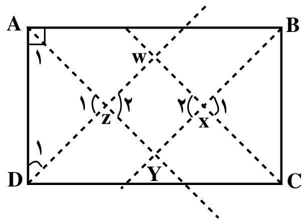
۴. یک نقطهٔ دلخواه روی قاعدهٔ یک مثلث متساوی الساقین در نظر بگیرید. از این نقطه به موازات دو ساق مثلث خطوطی رسم کنید. طول دو پاره‌خط را اندازه‌گیری کرده سپس مجموع آنها را به دست آورید. با جابه‌جا کردن این نقطه روی قاعده، چه تغییری در اندازهٔ این مجموع ایجاد

می‌شود؟ آیا رابطه‌ای بین این مجموع و اجزای مثلث وجود دارد؟

۱ــ۲ــ استدلال استنتاجی

در فعالیت ۱ــ۵ دربارهٔ **شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مستطیل** حدسهایی زدیم و با آزمایش دیدیم که آن شکل، یک مربع است. با این حال، نمی‌توانیم فقط با استناد به نتیجهٔ چند آزمایش یک نتیجه‌گیری کلّی کنیم و بگوییم که از **برخورد نیمسازهای هر مستطیل، یک مربع حاصل می‌شود.** اگر بخواهیم درستی این نتیجه را برای هر مستطیلی نشان دهیم، باید از روش استدلال استنتاجی استفاده کنیم. درستی حدسی را که در فعالیت ۱ــ۵ با کمک استدلال استقرایی زدیم، با روش استدلال استنتاجی نشان می‌دهیم :

مستطیل دلخواه ABCD را در نظر گرفته، نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن‌را رسم می‌کنیم.



شکل ۲

گام ۱

ــ AY نیمساز زاویهٔ A است و زاویهٔ A قائمه است. پس :

$$\hat{A}_۱ = ۴۵^\circ$$

ــ DW نیمساز زاویهٔ D است و زاویهٔ D قائمه است. پس :

$$\hat{D}_۱ = ۴۵^\circ$$

بنابراین، مثلث AZD متساوی‌الساقین است و در زاویهٔ Z قائمه می‌باشد. در نتیجه

$$\hat{Z}_۱ = \hat{Z}_۲ = ۹۰ \ , \ AZ = DZ \qquad (۱)$$

گام ۲

با استدلالی مشابه گام ۱ نتیجه می‌شود مثلث BXC متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است. پس :

$$\hat{X}_۱ = \hat{X}_۲ = ۹۰^\circ \ , \ BX = CX \qquad (۲)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) و مستطیل بودن ABCD، نتیجه می‌شود که دو مثلث ADZ و BXC همنهشت هستند. بنابراین ؛

$$DZ = CX$$

با استدلالی مشابه گام ۱، نتیجه می‌گیریم که مثلث CWD نیز متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است. یعنی :

$$\hat{W} = ۹۰ \ , \ \ DW = CW \qquad (۳)$$

گام ۳

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی WXYZ مستطیل است (چرا؟)
باتوجّه به رابطه‌های (۲) و (۳) می‌توان نوشت :

$$DW - DZ = CW - CX$$

یا

$$WZ = WX \qquad (۴)$$

رابطهٔ (۴) نشان می‌دهد که طول و عرض مستطیل WXYZ با هم برابر است، پس WXYZ یک مربع است. درنتیجه در حالت کلی نشان دادیم که :

> شکل حاصل از برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی هر مستطیل یک مربع است.

در اثبات بالا، از حکمهایی (حقایقی) استفاده کردیم که درستی آنها را قبلاً دیده بودیم. آن حکمها عبارتند از :

ــ مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است ؛

ــ مثلثی که دو زاویهٔ برابر دارد، متساوی‌الساقین است ؛

ــ زاویه‌های متقابل به رأس برابرند ؛

ــ اگر از طرفین یک تساوی، دومقدار یکسان کم کنیم، حاصل با هم برابر است.

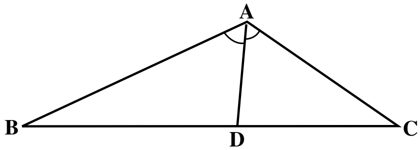
مثال بالا، نمونه‌ای از روش استدلال استنتاجی است.

تمرین ــ مشخّص کنید هریک از حکمهای بالا در چه قسمتهایی از اثبات بالا مورد استفاده قرار گرفته است؟

با رسم نیمساز هر زاویهٔ مثلث، ضلع مقابل به آن زاویه به دو پاره خط تقسیم می‌شود. طول دو پاره خط ایجاد شده رابطهٔ جالبی با طول دو ضلع آن زاویه دارند. این رابطه را در قضیه بعدی بیان کرده و با استفاده از استدلال استنتاجی، درستی آن را نشان می‌دهیم.

قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

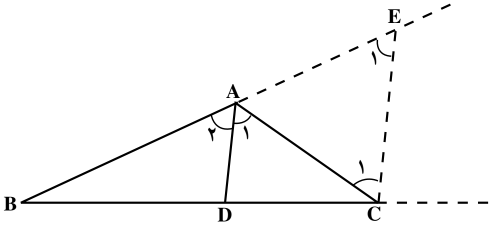
یعنی با توجّه به شکل اگر AD نیمساز زاویهٔ داخلی A باشد، باید ثابت کنیم :



شکل ۳

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

برهان: ضلعهای BA و BC را امتداد می‌دهیم و از رأس C خطی به موازات نیمساز زاویهٔ A (یعنی AD) رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند.



شکل ۴

چون AD موازی CE است اگر AC را به عنوان خط مورب در نظر بگیریم آنگاه

$$\hat{A}_1=\hat{C}_1 \qquad (۱)$$

و اگر BE را به عنوان خط مورب آنها درنظر بگیریم آنگاه

$$\hat{A}_2=\hat{E}_1 \qquad (۲)$$

از طرفی طبق فرض مسأله، AD نیمساز است در نتیجه

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \qquad (۳)$$

حال از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$\hat{C}_1=\hat{E}_1$$

پس مثلث AEC متساوی الساقین است و

$$AE=AC \qquad (۴)$$

در مثلث BEC، AD موازی EC است، پس طبق قضیهٔ تالس داریم

$$\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC} \qquad (۵)$$

با توجه به رابطهٔ (۴) اگر در رابطهٔ (۵) به جای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

که حکم ثابت می‌شود.

ادّعایی که درستی آن‌را در قضیهٔ قبل نشان دادیم، محدود به مثلث خاصی نیست. زیرا یک مثلث را بدون هیچ شرطی رسم کردیم و نشان دادیم که **نیمساز هر زاویهٔ داخلی مثلث، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.** نمادهایی را هم که برای نامگذاری امتداد ضلعها و رأسهای مثلث در شکل به کار بردیم، هیچ ویژگی خاصّی نداشتند و می‌توانستیم آنها را با هر نماد دیگری عوض کنیم و با روش استدلال استنتاجی، ادّعای فوق را ثابت نماییم.

تمرین: ثابت کنید نیمساز هر زاویهٔ خارجی مثلث،ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.

تا کنون، با استفاده از روش استدلال استنتاجی ثابت کردیم که :

ــ از تلاقی نیمسازهای هر مستطیل، یک مربع پدید می‌آید ؛

ــ هر زاویه خارجی مثلث برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است ؛

ــ نیمساز هر زاویهٔ داخلی مثلث ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.

این نتیجه‌های کلّی که همیشه درست هستند، نمونه‌هایی از **قضیه** می‌باشند.

به مثالهای بیشتری توجّه کنید :

۱ــ یکی از مهمترین قضیه‌های ریاضی قضیه فیثاغورس است :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر است.

۲ــ اگر وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری نظیر به نظیر برابر باشند، آنگاه آن دو مثلث همنهشت هستند[1].

۳ــ برای هر زاویهٔ α، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$$

۴ــ برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y،

$$\frac{x+y}{۲}\geq\sqrt{xy}$$

۱ ــ ۲ ــ ۱ ــ مثال نقض: در فعالیت ۱ــ۴، پس از چند آزمایش، چنین به نظر آمد که همیشه نقطهٔ همرسی ارتفاعها در داخل مثلث قرار دارد. امّا وقتی که این حدس را با مثلثی به

۱ــ اثبات این قضیه در هندسه ۱ آمده است.

ضلعهای ۶، ۸ و ۱۲ آزمودید، مشاهده کردید که ارتفاعها بیرونِ مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند. این مثلث خاص، مثال نقضی برای آن حدس کلی بود.

شاید با این مثال نقض، حدس خود را کامل‌تر نمودید و ادّعا کردید که نقطهٔ همرسی ارتفاعها یا داخل مثلث قرار می‌گیرد یا خارج آن. با این حال، ادامهٔ فعالیّت ۱ــ ۴ و بررسی نقطهٔ همرسی ارتفاعهای مثلث قائم‌الزاویه به شما نشان داد که حدس جدید نیز یک نتیجه‌گیری کلی نمی‌باشد زیرا با یک مثال، عمومیّت نتیجه‌گیری کلّی از بین رفت.

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا یک حدس کلی نادرست است **مثال نقض** گفته می‌شود.

توجّه: درستی یک نتیجه‌گیری کلّی به وسیلهٔ استدلال استنتاجی اثبات می‌گردد، یا نادرستی آن با یک مثال نقض نشان داده می‌شود.

مثال: حاصل جمع هر دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است.

حل : برای رد این ادعای کلی، کافی است دو عدد گنگ را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

$$x = \sqrt{۲}$$
$$y = -\sqrt{۲}$$

در این صورت،

$$x + y = \sqrt{۲} + (-\sqrt{۲}) = ۰$$

یعنی اگر چه موارد زیادی وجود دارد که در آنها، مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است ولی با این حال، با مثال نقض بالا، نادرستی نتیجه‌گیری کلّی **مجموع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است** را نشان دادیم.

در هندسه، مثال نقض کاربردهای فراوانی دارد.

فعالیت ۱ــ ۱۰

برای رد حدسهای کلی زیر مثال نقض ارائه کنید.

الف) نقطه همرسی عمودمنصف‌های سه ضلع یک مثلث همواره داخل مثلث قرار می‌گیرد.

ب) نقطه همرسی عمودمنصف‌های سه ضلع یک مثلث یا داخل مثلث یا خارج آن واقع است.

پ) ارتفاعهای هر مثلث داخل مثلث واقع است.

ت) هر زاویهٔ خارجی یک چندضلعی، از هر زاویه داخلی آن بزرگتر است.

۱ ــ ۲ ــ ۲ ــ قضیه‌های شرطی: زبان فارسی سرشار از ضرب‌المثلهای شیرین و آموزنده است و هدف آنها، آگاه کردن مردم از پیامدهای کارهایشان است. ضرب‌المثلهای «درخت تو گر بار دانش بگیرد، به زیر آوری چرخ نیلوفری را»، «تا نبارد ابر، کِی خندد چمن» و «سحرخیز باش تا کامروا باشی» تأکید می‌کنند که **اگر** «گرفتن بارِ دانش»، «باریدن»، و «سحرخیزی» باشد، **آنگاه** «به زیر آوردن چرخ نیلوفری»، «خندیدن چمن»، و «کامروایی» میسّر خواهد شد.

در ریاضیات، بسیاری از قضیه‌ها به‌صورت جمله‌های شرطی هستند. به مثالهای زیر توجّه کنید:

الف) اگر عدد حقیقی x بزرگتر از ۵ باشد، آنگاه $4x$ بزرگتر از ۲۰ است یا اگر $x > 5$ آنگاه $4x > 20$

ب) اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آنگاه زاویه‌های روبه‌رو به ساقها با هم برابرند.

پ) اگر چهارضلعی مستطیل باشد، آنگاه از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن یک مربع به‌وجود می‌آید.

این گونه جمله‌های شرطی **قضیه‌های شرطی** نامیده می‌شوند.

در قضیه‌های شرطی، جملهٔ شرط یا جمله‌ای که بعد از «اگر» می‌آید، «فرض قضیه» و جملهٔ نتیجه که بعد از کلمه «آنگاه» می‌آید، «حکم قضیه» نامیده می‌شود. در مثالهای بالا، فرض و حکم از این قرارند:

الف) $x > 5$ ، فرض قضیه و $4x > 20$ ، حکم قضیه است.

ب) **مثلث متساوی‌السّاقین است،** فرض قضیه و **زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها برابرند،** حکم قضیه است.

پ) **چهارضلعی مستطیل است،** فرض قضیه و **مربع بودن شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی،** حکم قضیه است.

دو کلمهٔ **اگر** و **آنگاه** نقش تعیین‌کننده‌ای در قضیه‌های شرطی دارند و در هر قضیهٔ شرطی، حکم از فرض نتیجه می‌شود. برای مثال، از فرض $x > 5$ نتیجه می‌شود که $4x > 20$. این رابطه را می‌توان به زبان نمادین به‌صورت زیر نوشت:

$$x > 5 \Rightarrow 4x > 20$$

این عبارت به دو صورت زیر خوانده می‌شود:

ــ $x > 5$ نتیجه می‌دهد $4x > 20$

ــ اگر $x > 5$ ، آنگاه $4x > 20$

بنابراین، علامت «$\Rightarrow$» به‌دو صورت **نتیجه می‌دهد** و **آنگاه** خوانده می‌شود. در حالت کلی، یک قضیه شرطی به‌صورت $p \Rightarrow q$ بیان می‌گردد که در آن p فرض قضیه و q حکم قضیه است. هر قضیهٔ کلی را می‌توان به صورت قضیه‌های شرطی بیان کرد. به مثال‌های زیر توجّه کنید :

۱ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر است.

این قضیه را می‌توان به‌صورت یک قضیه شرطی نوشت :

اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، **آنگاه** مربع وتر برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر آن مثلث است.

۲ــ مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

این قضیه را می‌توان به‌صورت قضیهٔ شرطی زیر بیان کرد :

اگر شکلی مثلث باشد، آنگاه مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° است.

قضیه‌های شرطی در هندسه دارای نقش مهمّی هستند و اغلب برای سادگی بیان، قضیه شرطی، **قضیه** نامیده می‌شود.

هرگاه در یک عبارت شرطی، فرض برقرار باشد ولی حکم درست نباشد، این عبارت شرطی یک قضیه شرطی نخواهد بود. برای مثال عبارت شرطی زیر را در نظر بگیرید :

اگر $x > 0$ ، آنگاه $x^2 > x$.

اگر $x = \frac{1}{2}$ را در رابطهٔ بالا قرار دهیم، آنگاه $x^2 = \frac{1}{4}$. در اینجا، فرض $x > 0$ برقرار است ولی حکم $x^2 > x$ یعنی $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ نادرست است. بنابراین، این عبارت شرطی یک قضیه نیست.

۱ ــ ۲ ــ ۳ ــ عکس قضیه: در ریاضیات، بعضی از قضیه‌های شرطی مانند قضیهٔ فیثاغورس از قضیه‌های شرطی دیگر مهم‌تر و با ارزش‌تر هستند. در **قضیهٔ فیثاغورس**، **فرض** آن است که مثلث قائم‌الزاویه است و **حکم** آن است که مربع وتر برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر مثلث است.

حالا به عبارت شرطی زیر توجّه کنید :

اگر در مثلثی مربع یک ضلع برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر باشد، آنگاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

در این عبارت، فرض آن است که در مثلثی مربع یک ضلع برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر است و حکم آن است که آن مثلث قائم‌الزاویه است.

مشاهده می‌شود که در این عبارتِ شرطی، فرض و حکم برعکس فرض و حکم در قضیه فیثاغورس است. دراین حالت می‌گوییم این عبارت شرطی، عکس قضیهٔ فیثاغورس است.

اگر جای فرض و حکم در یک قضیهٔ شرطی عوض شود، عبارت شرطی حاصل **عکس قضیهٔ شرطی** نامیده می‌شود.

در مثال قبل، عکس قضیهٔ فیثاغورس خود یک قضیهٔ شرطی است. آیا همیشه عکس یک قضیهٔ شرطی، یک قضیهٔ شرطی است؟ به آن فکر کنید!

فعالیت ۱ــ۱۱

۱ــ قضیه‌های شرطی زیر را در نظر بگیرید :

الف) مساحتهای هر دو مثلث همنهشت با هم برابرند.

ب) اگر در دو مثلث، طول ضلعها نظیر به نظیر با هم برابر باشند، آنگاه زاویه‌ها نظیر به نظیر با هم برابرند.

پ) اگر سه ضلع مثلث برابر باشند، آنگاه هر زاویهٔ آن 60° است.

ت) مثلثی که دو زاویه برابر دارد، دارای دو ضلع برابر است.

۲ــ عکس قضیه‌های شرطی بند (۱) را بنویسید.

۳ــ عکس کدامیک از قضیه‌های شرطی بند (۱) خود یک قضیه شرطی است و کدامیک از آنها قضیه شرطی نیست؟ چرا؟ دلیل آن را توضیح دهید.

اگر عکس یک قضیه شرطی خود یک قضیه شرطی باشد، آنگاه این دو قضیه شرطی را می‌توان به‌صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای، **قضیه دوشرطی** نامیده می‌شود.

چنانچه در قضیه فیثاغورس، فرض قضیه یعنی «مثلث قائم‌الزاویه است» را با p و حکم قضیه یعنی «مربع وتر برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر است» را با q نمایش دهیم، آنگاه، با این نمادگذاری قضیهٔ فیثاغورس به‌صورت

$$p \Rightarrow q$$

و عکس قضیه فیثاغورس به‌صورت

$$q \Rightarrow p$$

نمایش داده می‌شود. چون قضیه فیثاغورس و عکس آن هر دو برقرار هستند، با استفاده از نمادگذاری بالا می‌نویسیم

$$p \Leftrightarrow q$$

و می‌گوییم **p هم‌ارز (معادل) q است** و می‌خوانیم

p اگر و تنها اگر q

یعنی :

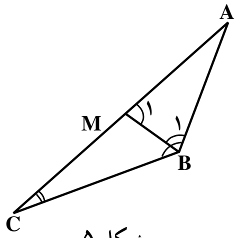
مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر باشد.

بنابراین، برای اثبات قضیه دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ ، بایستی قضیه‌های شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را ثابت کنیم.

حال از طریق استدلال استنتاجی یک قضیهٔ شرطی را ثابت می‌کنیم.

> **قضیه:** اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچکتر.

یعنی در مثلث ABC (شکل ۵)



شکل ۵

فرض: $AC > AB$ ، و **حکم:** $\hat{B} > \hat{C}$

برهان: چون طبق فرض، $\mathbf{AC > AB}$، بنابراین پاره‌خط AM را به اندازهٔ AB روی AC جدا می‌کنیم و از نقطهٔ M به B وصل می‌کنیم.

چون $AB = AM$ ، پس مثلث ABM متساوی‌الساقین است، درنتیجه ؛

$$\hat{B}_1 = \hat{M}_1 \qquad (۱)$$

از طرفی چون زاویهٔ M_1 یک زاویهٔ خارجی مثلث MBC است، درنتیجه از هریک از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگتر خواهد بود. بنابراین ؛

$$\hat{M}_1 > \hat{C} \qquad (۲)$$

با توجه به دو رابطهٔ (۱) و (۲)

$$\hat{B}_1 > \hat{C} \qquad (۳)$$

از طرفی، نقطهٔ M بین دو نقطهٔ A و C واقع است، بنابراین BM نیم‌خطی داخل زاویهٔ B است و درنتیجه زاویهٔ B_1 جزیی از زاویهٔ B است، یعنی :

$$\hat{B} > \hat{B}_1 \qquad (۴)$$

از مقایسهٔ (۳) و (۴) نتیجه می‌شود :

$$\hat{B} > \hat{C}$$

باعوض‌کردن جای فرض وحکم‌درقضیهٔ شرطی،عکس‌قضیه را می‌توان بیان کرد.

اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه روی زاویهٔ بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه‌روی زاویهٔ کوچکتر.

تمرین ــ از طریق استدلال استقرایی، پیش‌بینی کنید که آیا عکس قضیهٔ فوق برقرار است؟

مسأله‌ها

۱. با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.

الف) در هر مثلث ارتفاعها همرسند. ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است.

نتیجه : ارتفاعهای [ ] همرسند.

ب) لازمهٔ اشتغال در قرن ۲۱ میلادی داشتن سواد ریاضی است. علی در سال ۱۳۷۰ خورشیدی به‌دنیا آمده است.

نتیجه : علی برای پیدا کردن شغل، باید [ ] .

پ) برای اینکه بتوانیم مسأله‌ای را حل کنیم ابتدا باید مسأله را بفهمیم. محمود می‌خواهد مسأله حل کند.

نتیجه : محمود باید [ ] .

۲. آیا نتایج زیر از عبارتهای داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

الف) همهٔ دانش‌آموزان توانایی یادگرفتن ریاضی را دارند.

گلنار دانش‌آموز است.

نتیجه : گلنار می‌تواند ریاضی یاد بگیرد.

ب) بعضی از متوازی‌الاضلاعها مربع هستند.

چهارضلعی ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.

نتیجه : ABCD یک مربع است.

۳. کدامیک از عبارتهای زیر درست و کدامیک نادرست است.در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

الف) اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند، آنگاه هر دو زاویه قائمه هستند.

ب) اگرسه نقطه‌روی یک خط باشند، آنگاه از این سه نقطه فقط یک صفحه می‌گذرد.

۴. قضیه‌های زیر را به‌صورت قضیه‌های شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید عکس آنها قضیه شرطی است یا نه درصورتی که یک قضیه نباشد یک مثال نقض بیاورید.

الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

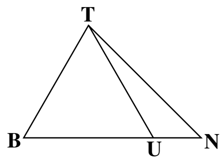
ب) هر دو مثلث همنهشت دارای مساحتهای برابر هستند.

پ) در دو مثلث متشابه، ضلعهای متناظر، متناسب هستند.

ت) در مثلث قائم‌الزاویه عمودمنصف‌های ضلعها در وسط وتر همرس می‌شوند.

ث) هرکس در شیراز زندگی می‌کند، در استان فارس است.

۵. قضیهٔ تالس را به‌صورت قضیهٔ دوشرطی بنویسید.



۶. در شکل مقابل :

فرض کنیم $BT = BU$

ثابت کنید $B\hat{T}N > T\hat{U}B$

۷. درستی حدس به دست آمده از انجام فعالیت ۱ــ۱ را با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید.

۸. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را به‌دست آورید.

۹. با استفاده از استدلال استقرایی پیش‌بینی کردید که از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل پدید می‌آید. این حدس را با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید.

۱۰. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر از یک نقطهٔ اختیاری روی قاعده یک مثلث متساوی‌الساقین دو خط به موازات دو ساق رسم کنیم تا آنها را قطع کند، آنگاه مجموع طول پاره‌خطهای ایجاد شده برابر طول ساق مثلث خواهد بود.

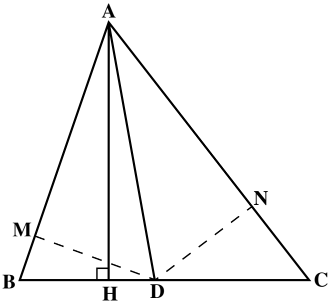
۱۱. از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مستطیل، یک مربع پدید می‌آید. رابطهٔ بین طول ضلع این مربع و اضلاع مستطیل را به‌دست آورید.

۱۲. مثلث متساوی‌الساقین ABC را در نظر بگیرید. نقطهٔ دلخواه P را روی قاعدهٔ BC اختیار کنید سپس مجموع فاصله‌های نقطهٔ P از دو ساق AB و AC را به‌دست آورید. با جابه‌جا کردن نقطهٔ P روی قاعده این مجموع چگونه تغییر می‌کند؟ درستی حدس خود را با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید.

۱۳. مسأله ۱۲ را در حالتی که نقطهٔ P روی امتداد BC قرار داشته باشد در نظر بگیرید و نشان دهید تفاضل فاصله‌های نقطهٔ P از دو ساق مقدار ثابتی خواهد بود.

۱۴. سه ضلع مثلثی ۸ ، ۱۲ و ۱۵ سانتی‌مترند، اندازهٔ پاره‌خطهایی که نیمساز درونی زاویهٔ بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، را تعیین کنید.

۱۵. در مثلث ABC میانهٔ AM و نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC را رسم کنید، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.



۱۶. در مثلث ABC، AH ارتفاع و AD نیمساز است.

مساحت مثلث ABD و ACD را به‌ترتیب با S و S′ نشان می‌دهیم.

الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعدهٔ این مثلثها، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به‌دست آورید.

ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آنها را M و N بنامید. DM و DN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعدهٔ مثلثهای ABD و ADC، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به‌دست آورید.

ت) از مقایسهٔ نسبتها در بند (الف) و (پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

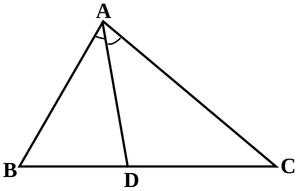
۱ــ ۳ ــ اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف

معمولاً برای اثبات قضیه‌ها، **به‌طور مستقیم** از داده‌ها که همان فرض‌ها هستند شروع می‌کنیم و با استفاده از سایر **قضیه‌ها** و **اصلها** و **تعریفها** یعنی **حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم**، برقراری حکم را نشان می‌دهیم. با این حال، به سادگی نمی‌توانیم بعضی از قضیه‌ها را به‌طور **مستقیم** اثبات کنیم و بهتر است راه **غیرمستقیم** را پیش بگیریم.

در زندگی روزانه از **استدلال غیرمستقیم** استفادهٔ زیادی می‌کنیم. برای مثال، در یک آزمون سه گزینه‌ای، اگر مطمئن نباشید که پاسخ درست، کدام گزینه است امّا بتوانید دربارهٔ نادرستی دو گزینه با اطمینان قضاوت کنید و به دلیل نادرستی آنها را حذف نمایید، آنگاه با اعتماد به نفس احساس می‌کنید که گزینهٔ باقی‌مانده پاسخ درست است. استدلال غیرمستقیم پایهٔ **اثبات غیرمستقیم** است که در آن، تمام نتیجه‌گیری‌های ممکن به جز نتیجه‌گیری‌های مورد نظر حذف می‌شوند. بنابراین، نتیجه‌گیری

باقی‌مانده باید درست باشد!

مثال: در مثلث ABC (شکل ۶)، AD نیمساز زاویه A است. اگر $BD \neq DC$ ثابت کنید $AB \neq AC$.



شکل ۶

حل: با **فهمیدن مسأله**؛ می‌توانیم فرض و حکم آن‌را بنویسیم :

فرض: درمثلث داده شدهٔ ABC، $BD \neq DC$

حکم: $AB \neq AC$

دو پاره‌خط AB و AC نسبت به هم فقط دو حالت دارند : یا با هم مساوی نیستند یا با هم مساوی هستند. اگر با هم مساوی نباشند، این همان **نتیجهٔ مطلوب** بوده و حکم ثابت است. با استفاده از **اثبات غیرمستقیم** می‌خواهیم امکان وجود حالت دوم یعنی تساوی این دو پاره‌خط را حذف کنیم. برای این کار، با قبول فرض مسأله، خلاف یا نقیض حکم را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که با وجود فرض مسأله، برقراری نقیض حکم امکان‌پذیر نیست.

اگر نقیض حکم یعنی $AB = AC$ برقرار باشد، در این صورت مثلث ABC متساوی‌الساقین است و می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویهٔ رأس، میانهٔ ضلع مقابل به آن نیز هست، $BD = DC$. امّا طبق فرض مسأله، $BD \neq DC$ یعنی وجود نقیض حکم با فرض داده شده در تناقض است، یعنی $AB = AC$ نمی‌تواند درست باشد. (چرا؟) پس $AB \neq AC$ باید برقرار باشد و حکم ثابت است.

این حقیقت که یک عبارت ریاضی نمی‌تواند همزمان هم درست و هم نادرست باشد اساس روش اثبات غیر مستقیم است. به بیان دقیقتر روش اثبات غیرمستقیم بر مبنای دو اصل منطقی استوار است :

۱ــ یک عبارت ریاضی و خلاف (نقیض) آن، هر دو درست نیستند ؛

۲ــ فقط یکی از دو عبارت ریاضی که یکی از آنها خلاف (نقیض) دیگری است، درست است.

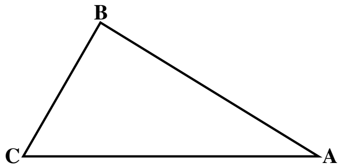
اثبات غیرمستقیم، **برهان خلف** نیز نامیده می‌شود. برای استفاده از برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم، گامهای زیر را بر می‌داریم :

> **گام ۱:** فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد.
>
> **گام ۲:** نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه در تناقض است.
>
> **گام ۳:** با نادرست بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که حکم درست است.

مثال: قضیهٔ زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید :

اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه رو به زاویه بزرگتر، بزرگتر از ضلع روبه روی زاویه کوچکتر است.

حل: ابتدا شکلی رسم می‌کنیم که شرایط فرض مسأله را داشته باشد، یعنی مثلثی با دو زاویهٔ نابرابر رسم می‌کنیم و آن‌را ABC می‌نامیم. اگر در مثلث ABC، زاویهٔ B بزرگتر از زاویه C باشد، آنگاه باید نشان دهیم ضلع AC بزرگتر از ضلع AB است. به زبان نمادین.



شکل ۷

فرض: $\hat{B} > \hat{C}$ ،

حکم: $AC > AB$.

گام ۱: فرض می‌کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد یعنی $AC \ngtr AB$.

گام ۲: در این صورت $AC \leq AB$.

ــ اگر $AC = AB$ ، آنگاه مثلث متساوی‌الساقین است و درنتیجه $\hat{B} = \hat{C}$ که با فرض قضیه یعنی $\hat{B} > \hat{C}$ در تناقض است ؛

ــ اگر $AC < AB$، طبق قضیه ۱ بخش قبل، $\hat{B} < \hat{C}$ که با فرض قضیه یعنی $\hat{B} > \hat{C}$ درتناقض است.

بنابراین به یک تناقض رسیدیم.

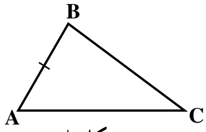
گام ۳: این تناقض نشان می‌دهد که نقیض حکم یعنی $AC \ngtr AB$ نادرست است. درنتیجه حکم قضیه درست می‌باشد.

این مثال نشان می‌دهد که عکس قضیه ۱ برقرار است، یعنی قضیه ۱، یک قضیه دوشرطی است. پس می‌توان گفت :

در مثلث، یک ضلع از ضلع دیگر بزرگتر است اگر و تنها اگر زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچکتر باشد.

قضیه نامساوی مثلث: در هر مثلث، مجموع طولهای هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

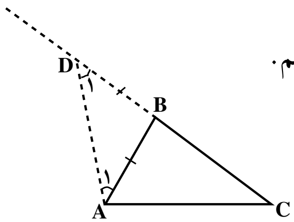
توجه: با فرض مثلث بودن ABC، می‌خواهیم درستی حکم زیر را نشان دهیم :



شکل ۸

حکم :
$$\begin{cases} AB+BC>AC \\ AB+AC>BC \\ BC+AC>AB \end{cases}$$

کافی است یکی از سه نامساوی حکم را ثابت کنیم (اثبات دو قسمت دیگر کاملاً مشابه این قسمت است).



شکل ۹

برهان: مسأله را به مسأله‌ای تبدیل می‌کنیم که حل آن را می‌دانیم.

برای این کار، ضلع BC را از رأس B امتداد می‌دهیم و به اندازهٔ AB روی آن جدا می‌کنیم تا نقطه D به دست آید. سپس، D را به A وصل می‌کنیم.

در مثلث ADB، چون

$$DB=AB \qquad (۱)$$

درنتیجه

$$\hat{D}_۱=\hat{A}_۱ \qquad (۲)$$

همچنین، در مثلث ADC

$$DC=DB+BC \qquad (۳)$$

با توجّه به (۱)،

$$DC=AB+BC \qquad (۴)$$

و با توجه به شکل،

$$D\hat{A}C>\hat{A}_۱=\hat{D}_۱ \qquad (۵)$$

طبق (۵) و قضیه ۱،

$$DC>AC$$

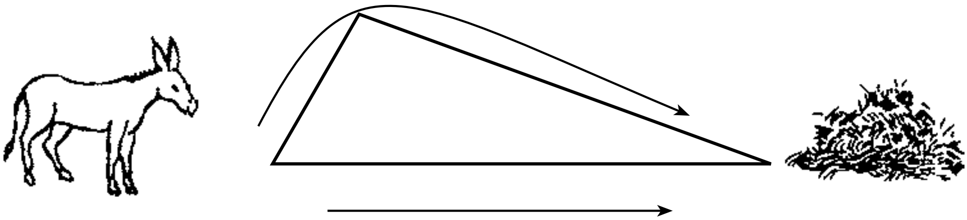
با استفاده از (۴)،

$$AB+BC>AC$$

و حکم ثابت است.

نکته: این قضیه در ریاضیات ایرانی به «قضیه حِمار» مشهور است و دلیل این نامگذاری این

است که اگر برای رسیدن به علوفه دو راه به‌صورت زیر ممکن باشد، حیوان به‌طور غریزی و طبیعی راه کوتاهتر را انتخاب می‌کند که حاکیِ از بدیهی بودن قضیه نامساوی مثلث است.



شکل ۱۰

در اثبات قضیهٔ بالا، ابتدا آن را به قضیه‌ای تبدیل کردیم که اثبات آن‌را می‌دانستیم و سپس با استفاده از آن، حکم را ثابت کردیم. این استراتژی، **تبدیل مسأله به مسألهٔ خویشاوند**[1] است که استفاده از آن در حل بعضی مسأله‌ها و اثبات بعضی قضیه‌ها، بسیار مفید است.

عکس قضیه بالا نیز یک قضیه است که به **قضیهٔ وجود مثلث** معروف است.

قضیهٔ وجود مثلث: سه عدد حقیقی مثبت a، b و c داده شده‌اند، اگر هریک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که ضلعهای آن a، b و c هستند[2].

مثال: آیا مثلثی با ضلعهای ۱۲، ۲۰ و ۳۰ وجود دارد؟

حل: برای اثبات وجود مثلث، رابطه‌های زیر باید برقرار باشند :

$$۱۲ < ۲۰ + ۳۰ = ۵۰$$

$$۲۰ < ۱۲ + ۳۰ = ۴۲$$

$$۳۰ < ۲۰ + ۱۲ = ۳۲$$

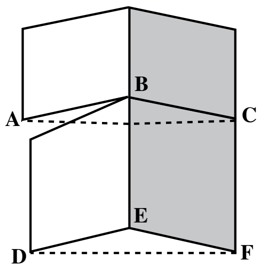
از برقراری نامساوی بالا، طبق قضیهٔ وجود مثلث نتیجه می‌گیریم که مثلثی با ضلعهای ۱۲، ۲۰ و ۳۰ وجود دارد.

تمرین ــ ثابت کنید در هر مثلث طول هر ضلع از تفاضل طول دو ضلع دیگر بزرگتر است.

۱ــ خلاقیت ریاضی نوشتهٔ جورج پولیا ترجمهٔ پرویز شهریاری

۲ــ اثبات این قضیه خارج از برنامهٔ رسمی درس است و در مجلهٔ ریاضی آورده شده است.

قضیهٔ لولا (قضیه قیچی)



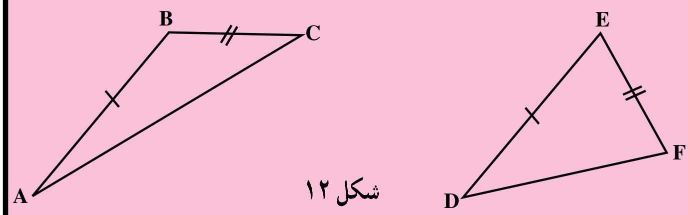
شکل ۱۱

قضیهٔ لولا را می‌توانید به‌صورت یک درِ دو قسمتی تصور کنید. اگر قسمت بالاییِ در از قسمت پایینی بیشتر باز باشد، مثلثی که توسط زاویه‌های ABC و DEF تشکیل می‌شود دارای دوجفت ضلع همنهشت است، یعنی $AB = DE$ و $BC = EF$. امّا

$$A\hat{B}C > D\hat{E}F$$

ضلع AC را با DF مقایسه کنید. به نظر می‌آید که $AC > DF$.

قضیهٔ لولا: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند و زاویهٔ بین این دو ضلع در مثلث اول بزرگتر از زاویهٔ بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آنگاه ضلع سوم از مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم از مثلث دوم است.



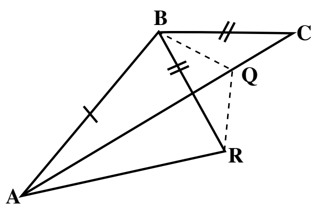
شکل ۱۲

توجه : برای ساده‌تر شدن، فرض و حکم قضیه را می‌نویسیم :

فرض: مثلثهای ABC و DEF داده شده‌اند به‌طوری‌که

$$AB = DE \text{ و } BC = EF \text{ و } A\hat{B}C > D\hat{E}F$$

حکم: $AC > DF$



شکل ۱۳

برهان: چون $A\hat{B}C > D\hat{E}F$ ، از B خط BR را طوری رسم می‌کنیم که $A\hat{B}R = D\hat{E}F$ و $BR = EF$ باشد.

با رسم AR، مثلث ABR با مثلث DEF همنهشت می‌شود. (چرا؟) درنتیجه ؛

$AR = DF$

چون $BC = EF$

و $BR = EF$

پس $BC = BR$

حال Q را روی AC طوری انتخاب می‌کنیم که BQ نیمساز زاویهٔ RBC باشد. با رسم QR، دو مثلث BQR و BQC همنهشت هستند. چرا؟ درنتیجه؛

$$QR = QC \qquad (۱)$$

همچنین در مثلث AQR، با توجه به نامساوی مثلث؛

$$AQ + QR > AR \qquad (۲)$$

با استفاده از (۱)،

$$AQ + QC > AR \qquad (۳)$$

چون Q بر پاره‌خط AC قرار دارد، بنابراین :

$$AQ + QC = AC \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{AC > AR}$$

چون $AR = DF$ پس $AC > DF$ و حکم ثابت است.

عکس قضیهٔ لولا : اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشد و ضلع سوم مثلث اوّل بزرگ‌تر از ضلع سوم مثلث دوم باشد، آنگاه زاویهٔ بین دو ضلع از مثلث اوّل بزرگ‌تر از زاویهٔ بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم است.

تمرین ــ با استفاده از روش اثبات غیرمستقیم، عکس قضیهٔ لولا را ثابت کنید.

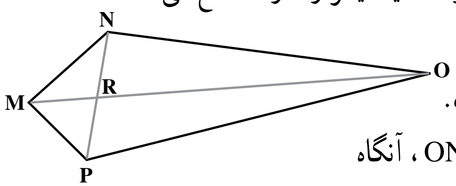
مسأله‌ها

۱. حسن در دادگاه تخلّفات رانندگی اظهار داشت «من نمی‌توانم عامل این تصادف باشم زیرا در زمان وقوع تصادف، در محل کارم بوده‌ام و برای این ادّعا، شاهد هم دارم.» نوع استدلال حسن را توضیح دهید.

با استفاده از برهان خلف، مسأله‌های ۲ تا ۶ را حل کنید.

۲. اگر a، b و c سه خط راست باشند که $a \parallel b$ و $c \parallel b$، آنگاه $a \parallel c$.

۳. در چهارضلعی MNOP، دو قطر MO و NP یکدیگر را در R قطع می‌کنند.



الف) نشان دهید اگر $MP = MN$ و $ON \neq OP$، آنگاه MO نیمساز زاویهٔ PMN نیست.

ب) نشان دهید اگر $MP = MN$ و $ON \neq OP$، آنگاه

OM بر NP عمود نیست.

۴. در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، اگر $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $\hat{A} \neq \hat{A}'$ ، ثابت کنید $BC \neq B'C'$.

۵. در هر مثلث

الف) هر دو نیمساز زاویه‌های داخلی متقاطعند.

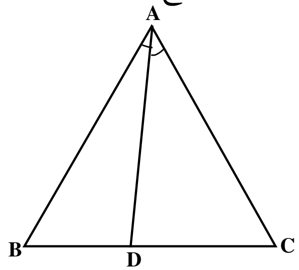
ب) هر دو میانه متقاطعند.

پ) هر دو ارتفاع متقاطعند.

ت) عمودمنصف‌های هر دو ضلع متقاطعند.

۶. عمود منصف هر پاره‌خط یکتاست.

۷. سه پاره‌خط با طولهای $۶x$، $x + ۷$ ، $۴(x - ۱)$ داده شده‌اند. اگر مجموع این طولها ۳۶ باشد، آیا این پاره‌خطها می‌توانند ضلعهای یک مثلث باشند؟ توضیح دهید.



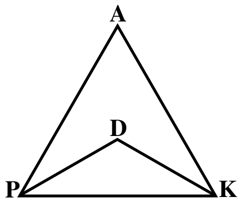
۸. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

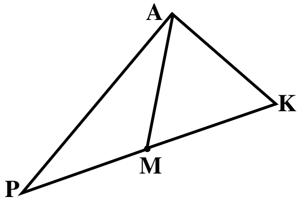
اگر $BD < DC$، ثابت کنید $B\hat{A}D < D\hat{A}C$.

۹. ثابت کنید در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر است.

۱۰. ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه داخل مثلث از سه رأس، از نصف مجموع سه ضلع مثلث بزرگتر است.

۱۱. نقطه D را به دلخواه در درون مثلث PAK انتخاب می‌کنیم ثابت کنید زاویه PDK از زاویه PAK بزرگتر است.

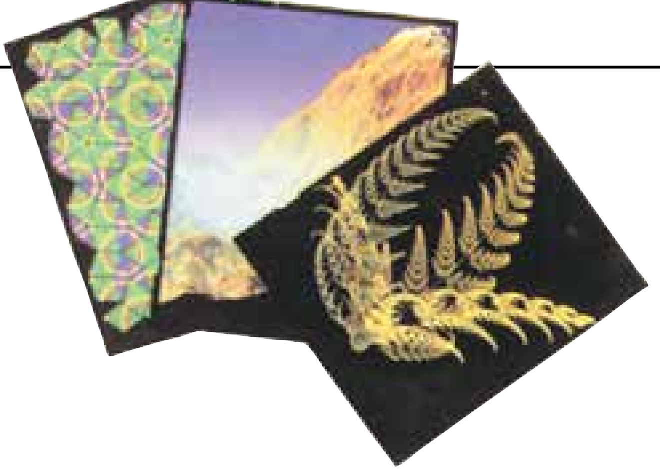




۱۲. در مثلث PAK، نقطه Mروی ضلع PK قرار دارد.

الف) ثابت کنید اگر $PM = AK$ آنگاه $AP > MK$

ب) ثابت کنید اگر $AM = AK$ آنگاه $AP > AK$



مجلهٔ ریاضی

هرچند گالیله گفته است «کتاب عظیم طبیعت را به‌زبان ریاضی نوشته‌اند» و افزوده است که «الفبای این زبان، مثلثها، دایره‌ها و سایر شکلهای هندسی‌اند که بدون آنها انسان در هزارتوی ظلمانی سردرگم می‌شود»، اما این شکلهای هندسهٔ اقلیدسی در الگوسازی دستگاههای نامنظم به هیچ کار نمی‌آیند. این پدیده‌ها به هندسه‌هایی نیاز دارند که از مثلثها و دایره‌ها بسیار دورند. در مورد آنها باید از ساختارهای نااقلیدسی و بخصوص از هندسهٔ نوینی به نام **هندسهٔ فراکتالها** استفاده کرد.

واژهٔ فراکتال را در سال ۱۹۷۵ ازکلمهٔ لاتینی فراکتوس به معنی سنگی که به شکل نامنظم شکسته و خرد شده است، ساخته‌اند. فراکتالها شکلهایی هستند که برعکس شکلهای هندسهٔ اقلیدسی به هیچ وجه منظم نیستند. این شکلها اولاً سراسر نامنظم‌اند، ثانیاً، **میزان بی نظمی آنها در همهٔ مقیاسها یکسان است**. جسم فراکتالی از دور و از نزدیک یکسان دیده می‌شود و به تعبیر دیگر، **خود ــ متشابه** است. وقتی به یک جسم نزدیک شویم، می‌بینیم که تکه‌های کوچکی از آن که از دور همچون دانه‌های بی‌شکلی به نظر می‌رسید به‌صورت جسم مشخصی درمی‌آید که شکلش کم و بیش مثل همان شکل کلّی است که از دور دیده می‌شد.

در طبیعت نمونه‌های فراوانی از فراکتالها دیده می‌شوند که سرخسها و انواع گوناگون گل کلم از آن جمله‌اند زیرا به هر شاخه ازگیاه که نگاه کنیم، تصوّری از کل گیاه در ذهن ما ایجاد می‌شود. قانونهای حاکم بر رشد این گیاهان موجب می‌شود که خصوصیتی که در مقیاس کوچک وجود دارد به مقیاسهای بزرگ نیز منتقل شود.

بنوا مندلبرات ــ هندسهٔ فراکتالها، توصیفگر طبیعت، ترجمهٔ محمد باقری ــ مجله دانشمند شمارهٔ ۳۳۸ــ آذر ۱۳۷۰.



۱ــ ۴ ــ مکان هندسی

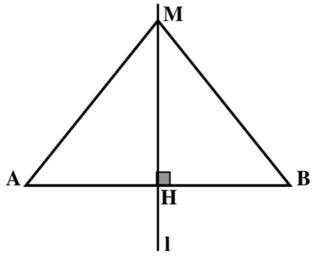
وقتی پرّه‌های یک هلیکوپتر[1] در حال چرخیدن هستند، نوک پره‌ها **مجموعهٔ نقطه‌هایی** از فضای اطراف هلیکوپتر را مشخص می‌کنند که دارای ویژگی **مشترکی** هستند. ویژگی این نقطه‌ها آن است که همگی از محور چرخش پرّه‌ها به یک فاصله‌اند. همچنین، نوک عقربهٔ ثانیه‌شمار ساعتهای عقربه‌ای، مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحهٔ دایره ساعت را تشکیل می‌دهند که دارای ویژگی مشترکی هستند و آن این که همگی از مرکز صفحهٔ ساعت به یک فاصله‌اند. این مجموعهٔ نقطه‌ها نمونه‌هایی از **مکان هندسی**‌اند.

مکان هندسی، مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های صفحه یا فضا است که دارای ویژگی مشترکی هستند ؛ یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که آن ویژگی را دارد عضو این مجموعه می‌باشد.

مثال ۱: می‌خواهیم ثابت کنیم عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. در اینجا ویژگی مشترکی که در تعریف مکان هندسی ذکر کردیم، **یکسان بودن فاصلهٔ نقطه از دو سر پاره‌خط** است. پس برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم :

الف) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است ؛

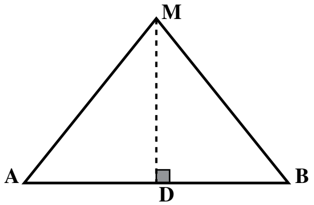
۱ــ به تازگی، واژهٔ چرخ بال برای هلیکوپتر انتخاب شده است.



شکل ۱۴

ب) هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط واقع است.

حل: برای اثبات (الف) فرض می‌کنیم نقطه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB (خط l) باشد. چون l عمودمنصف است، در H بر وسط AB عمود است. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH و BMH به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آنها، همنهشت هستند. درنتیجه، $MA = MB$ یعنی M از A و B به یک فاصله است.



شکل ۱۵

برای اثبات (ب) فرض می‌کنیم نقطهٔ M از A و B به یک فاصله باشد، یعنی در مثلث MAB، داریم $MA = MB$. از M به نقطهٔ D وسط پاره‌خط AB وصل می‌کنیم. دو مثلث MAD و MBD به دلیل تساوی سه ضلع $(MD = MD, DA = DB, MA = MB)$ همنهشت هستند. پس $M\hat{D}A = M\hat{D}B = ۹۰^\circ$. یعنی MD عمود بر AB و درنتیجه، MD عمود منصف پاره‌خط AB است. بنابراین، M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

> **قضیه:** نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره‌خط AB است اگر و فقط اگر فاصلهٔ M از A و B مساوی باشد.

نقطه‌هایی که روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند، مجموعه‌ای از نقطه‌های صفحه هستند که آنها را با $S_۱$ نشان می‌دهیم. نقطه‌هایی از صفحه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند نیز مجموعه‌ای از نقطه‌های صفحه است که آن را با $S_۲$ نشان می‌دهیم. در قسمت (الف) مثال ۱، عضوی از مجموعهٔ $S_۱$ را مثل M درنظر گرفتیم و نشان دادیم M عضوی از مجموعهٔ $S_۲$ است. در قسمت (ب) عضوی از مجموعهٔ $S_۲$ را انتخاب کردیم و ثابت کردیم آن نقطه عضوی از مجموعهٔ $S_۱$ است. درواقع، هر عضو مجموعهٔ $S_۱$ عضوی از مجموعهٔ $S_۲$ و هر عضو مجموعهٔ $S_۲$ عضوی از مجموعهٔ $S_۱$ نیز هست. یعنی؛

$$S_۱ = S_۲$$

پس دو مرحلهٔ اثبات مکان هندسی بودن یک مجموعه، معادل این است که تساوی دو مجموعه را ثابت کنیم.

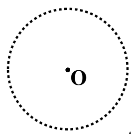
برای مشخص کردن مکان هندسی، برداشتن سه گام زیر سودمند است. این گامها براساس استدلال استقرایی است :

گام اول: به اندازهٔ کافی نقطه‌هایی را که در ویژگیِ داده شده صدق می‌کنند بیابید ؛
گام دوم: آن نقطه‌ها را به یکدیگر وصل کنید تا تصوّری شهودی از مکان هندسی مورد نظر پیدا کنید ؛
گام سوم: مکان هندسی را توصیف کنید. سپس بررسی کنید که آیا هر نقطه در مجموعهٔ نقطه‌هایی که یافته‌اید در ویژگی داده شده صدق می‌کند و برعکس، آیا هر نقطه که در این ویژگی صدق کند، در مجموعه‌ای که یافته‌اید قرار دارد؟

مثال ۲: می‌خواهیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را بیابیم که از یک نقطهٔ ثابتِ داده شده به فاصلهٔ واحد باشد. دراینجا، ویژگی مشترک، **هم فاصله‌بودن از یک نقطهٔ ثابت** است.

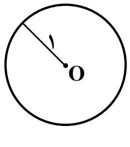
حل:

گام اول: نقطهٔ ثابت را O می‌نامیم و تعدادی از نقطه‌ها را با ویژگی بیان شده پیدا می‌کنیم. این نقطه‌ها در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



گام دوم: شکل حاصل یک دایره به نظر می‌رسد.

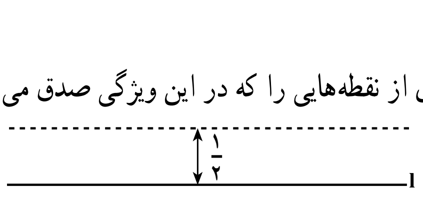
گام سوم: مکان هندسی مورد نظر، یک دایره به مرکز O و شعاع «یک» است. فاصلهٔ هر نقطه روی این دایره از مرکز آن یعنی O، برابر واحد است. همچنین اگر فاصلهٔ نقطه‌ای مانند M از O برابر واحد باشد،آنگاه $OM = ۱$ پس OM یک شعاع دایره خواهد بود، درنتیجه M روی دایره است.



مثال ۳: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنید که از یک خط داده شدهٔ l به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ باشد.

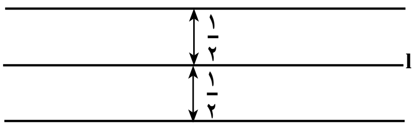
حل:

گام اول: ابتدا تعدادی از نقطه‌هایی را که در این ویژگی صدق می‌کنند، پیدا می‌کنیم.



گام دوم: با وصل کردن هر مجموعه از نقطه‌هایی که در یک طرف خط l قرار دارند، دو خط راست به دست می‌آوریم. پس به نظر می‌رسد این مکان هندسی، دو خط باشد.

گام سوم: مکان هندسی نقطه‌ای که به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ از خط داده شدهٔ l قرار دارد، دو خط راست موازی با l است.

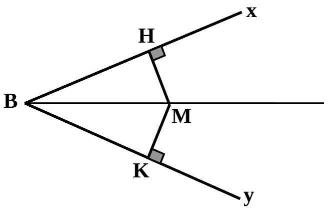


دو نتیجه‌ای را که در مثالهای ۲ و ۳ براساس استدلال استقرایی به دست آوردیم، به صورت زیر می‌توان بیان کرد.

> **۱:** مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که به فاصلهٔ R از نقطهٔ ثابت O درون همان صفحه قرار دارد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.
>
> **۲:** مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از یک خط راست داده شده در همان صفحه به فاصلهٔ d قرار دارد، دو خط راست موازی با آن خط و در دو طرف آن است.

> **قضیه:** نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه‌ای در صفحهٔ آن زاویه است که فاصلهٔ آن از دو ضلع زاویه برابر باشد.

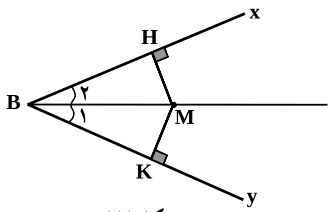
برهان: در این قضیه، ویژگی مشترکی که مکان هندسی را مشخص می‌کند «یکسان بودن فاصله نقطه از دو ضلع زاویه» است. براساس تعریف مکان هندسی، اثبات دو مرحله دارد :



شکل ۱۶

مرحله اول: ثابت می‌کنیم هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. نقطهٔ M را روی نیمساز زاویهٔ $X\hat{B}Y$ در نظر می‌گیریم. از M خطهایی بر ضلعهای BX و BY عمود می‌کنیم تا آنها را به ترتیب در H و K قطع کنند. دو مثلث BMH و BMK به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین آنها، همنهشت هستند، پس :

$$MH = MK$$



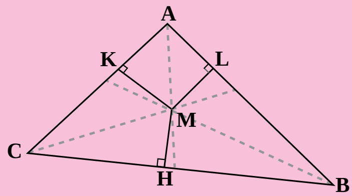
شکل ۱۷

مرحله دوم: اگر نقطهٔ M از دو ضلع BX و BY به فاصلهٔ یکسان باشد، چون دو مثلث قائم‌الـزاویهٔ BMH و BMK به حالت تساوی وتر و یک ضلع همنهشت هستند، پس :

$$\hat{B}_{۱} = \hat{B}_{۲}$$

یعنی خطی که از B و M می‌گذرد، نیمساز زاویه است. درنتیجه، M روی نیمساز زاویه B واقع و از این، درستی حکم نتیجه می‌شود.

قضیه: سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.



شکل ۱۸

برهان: در مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. از M بر ضلعهای AB، AC و BC عمود می‌کنیم تا به ترتیب آنها را در نقطه‌های L، K و H قطع نمایند. چون M روی نیمساز زاویهٔ B است، پس :

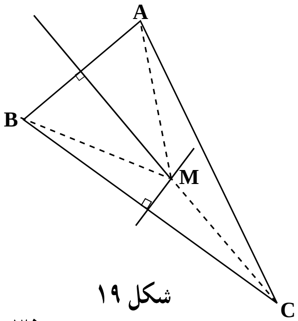
$$MH = ML \qquad (۱)$$

و چون M روی نیمساز زاویهٔ C قرار دارد، پس :

$$MH = MK \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود MK = ML . بنابراین، M روی نیمساز زاویه A نیز قرار دارد. پس M محل تلاقی سه نیمساز مثلث ABC است، یعنی **سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.**

قضیه: عمودمنصف‌های ضلعهای هر مثلث همرسند.



شکل ۱۹

برهان: عمودمنصف‌های دو ضلع AB و BC از مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. چون M روی عمودمنصف BC است، پس

$$MB = MC \qquad (۳)$$

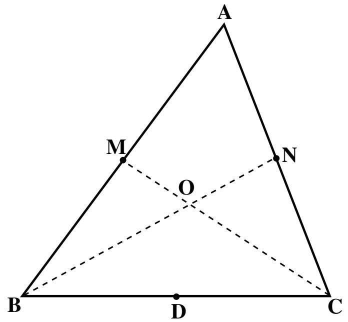
و چون M روی عمودمنصف AB است پس

$$MA = MB \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که $MA = MC$. بنابراین، نقطهٔ M از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است. یعنی نقطهٔ M روی عمودمنصف AC است. درنتیجه، هرسه عمود منصف از نقطهٔ M می‌گذرند. بنابراین، عمودمنصف‌های ضلعهای هر مثلث همرسند.

فعالیت ۱ــ۱۲

هدف این فعالیت آن است که درستی حدسی را که در فعالیت ۱ــ۳ از طریق استدلال استقرایی با بررسی چند حالت خاص ارائه کردید، با استفاده از استدلال استنتاجی در حالت کلّی نشان دهید. برای این کار، مثلث دلخواه ABC و دو میانهٔ CM و BN را رسم کنید و محل تقاطع آنها را O بنامید.



شکل ۲۰

الف) وسط BO را P و وسط CO را Q بنامید و پاره‌خط PQ را رسم کنید.

ب) با استفاده از عکس قضیهٔ تالس و این خاصیت که دو خط موازی با یک خط، خود موازیند، نشان دهید که MN موازی PQ است.

پ) با استفاده از قضیهٔ تالس، نشان دهید $MN = PQ$.

ت) ثابت کنید که چهارضلعی MNQP متوازی‌الاضلاع است.

ث) نشان دهید

$$\frac{BO}{ON} = \frac{CO}{OM} = \frac{۲}{۱}$$

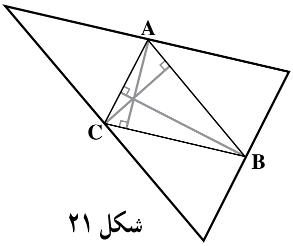
چون میانه‌های CM و BN به دلخواه انتخاب شده بودند، پس این رابطه برای هر دو میانهٔ دلخواه دیگر نیز درست است.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که سه میانه همرسند (چرا؟) و همدیگر را به نسبت ۱ و ۲ قطع می‌کنند.

توجه: نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث، **مرکز ثقل** آن است.

قضیه: سه میانه هر مثلث همرسند.

قضیه: سه ارتفاع هر مثلث همرسند.



شکل ۲۱

تمرین ــ قضیه بالا را ثابت کنید.

(**راهنمایی:** از رأسهای مثلث خط‌هایی به موازات سه ضلع مثلث رسم کنید تا مثلث جدیدی تشکیل شود. آنگاه ثابت کنید ارتفاعهای مثلث اوّلیه، عمودمنصف‌های مثلث جدید هستند.)

مسأله‌ها

در هریک از موارد زیر مکان هندسی را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید.

۱. مکان هندسی مرکز توپی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می‌غلتد.

۲. مکان هندسی مرکز دایره‌ای که در خارج یک دایرهٔ داده شده واقع است و روی محیط آن می‌غلتد.

۳. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است.

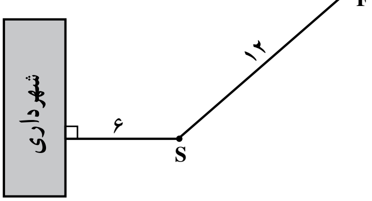
۴. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو صفحهٔ موازی به یک فاصله باشد.

۵. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو صفحهٔ موازی M و R به یک فاصله باشد و از نقطهٔ ثابت P، به فاصلهٔ d باشد.

۶. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از یک خط داده شده به فاصله d باشد.

۷. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطهٔ مشخص بر یک خط داده شده مماس باشد.

۸. سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را بر روی صفحهٔ مربع شکلی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر پرتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع می‌شود.



۹. نمودار مقابل محل قرارگرفتن ساختمان شهرداری، مجسمه S و فوارهٔ F را نشان می‌دهد. می‌خواهیم میلهٔ پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصلهٔ ۹ متر باشد. مکان هندسی محل نصب میلهٔ پرچم را تعیین کنید.

۱ ــ ۵ ــ ترسیم با خط‌کش و پرگار

«رسم یا ساختن شکلهای هندسی به کمک پرگار و خط کش، به طور سنتی جای نمایانی را در آموزش هندسهٔ مسطحه گرفته است. ساده‌ترین این ترسیمها آنهایی است که به‌طور وسیع مورد استفادهٔ صنعتگران قرار می‌گیرد. ولی در سایر موردها، ارزش عملی ترسیمهای هندسی قابل توجه نیست و اهمیت نظری چندان زیادی هم ندارد. با همهٔ اینها، کاملاً به حق می‌توان این ارزش را برای این‌گونه ترسیمها در آموزش قایل شد، چرا که این ترسیمها، مناسب‌ترین وسیله برای آشنایی با شکلهای هندسی هستند و بهتر از هر وسیلهٔ دیگری، زمینه را برای فراگرفتن حل مسألهٔ ریاضی فراهم می‌کنند[۱].»

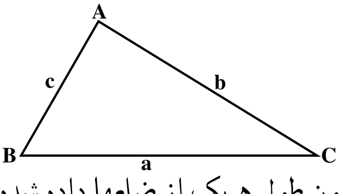
ترسیمهای هندسی به زمان اقلیدس برمی‌گردد. در مسألهٔ اوّل از کتاب اوّل اصول اقلیدس، پیشنهاد شده است که «روی یک پاره‌خط، یک مثلث متساوی‌الاضلاع بنا کنید.»، در واقع حل این مسأله به سادگیِ حل مسألهٔ تعمیم‌یافتهٔ زیر است :

مثلثی رسم کنید که سه ضلع آن داده شده باشد.

با تجزیه و تحلیل این مسأله، می‌توانیم یک روش کلی برای حل مسأله‌های ترسیمهای هندسی پیدا کنیم :

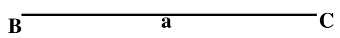
در هر مسأله یک **مجهول** وجود دارد. اگر همه چیز دانسته شده باشد، دیگر موردی برای جست‌وجو و کاری برای انجام دادن باقی نمی‌ماند. در این مسأله، چیزی که به دنبال آن هستیم، **یعنی مجهول، یک شکل هندسی و در اینجا، یک مثلث است.** با این حال، در هر مسأله باید چیزی معلوم باشد که به آن داده می‌گوییم. **داده‌های این مسأله، طول ضلعهای مثلث هستند** که آنها را a، b و c می‌نامیم.

استراتژی حل مسأله: مسأله را حل شده فرض می‌کنیم.



شکل ۲۲

با توجه به شکل، چون طول هریک از ضلعها داده شده‌اند، پس می‌توانیم یکی از ضلعها مثلاً BC را با طول معلوم a رسم کنیم :



بنابراین، برای رسم مثلث ABC که مجهول مسأله است، باید رأس A را طوری پیدا کنیم تا در

۱ــ جورج پولیا، خلاقیت ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری

شرطهای مسألهٔ ما صدق کند یعنی

شرط (۱) $AC = b$

شرط (۲) $AB = c$

یعنی مجهول مسأله ما تبدیل به نقطه مجهول A گردید.

با توجه به شرط (۱)، نقطهٔ A باید به فاصلهٔ b از C قرار داشته باشد، پس مکان هندسی نقطهٔ A در صفحه، دایره‌ای به مرکز C و شعاع b است. همچنین، طبق شرط (۲)، نقطهٔ A به فاصلهٔ c از B قرار می‌گیرد، پس مکان هندسی نقطهٔ A در صفحه، دایره‌ای به مرکز B و شعاع c است.

بنابراین، هرکدام از این دو شرط، یک مکان هندسی برای رأس A که مجهول مسأله بود مشخص کرد. پس نقطهٔ A به ناچار به این دو مکان هندسی تعلّق دارد. درنتیجه، برای یافتن نقطهٔ A دو دایره به مرکزهای B و C و به‌ترتیب با شعاعهای c و b رسم می‌کنیم، نقطهٔ برخورد آنها نقطهٔ A است. **این مسأله چند جواب دارد؟**

حل این مسأله به ما نشان داد که نقطهٔ A، رأس سوم مثلث، به وسیلهٔ دو مکان هندسی مشخّص می‌شود. از این یافته، به عنوان **استراتژی دو مکان هندسی**[۱] در حل مسأله‌های ترسیمی استفاده می‌کنیم.

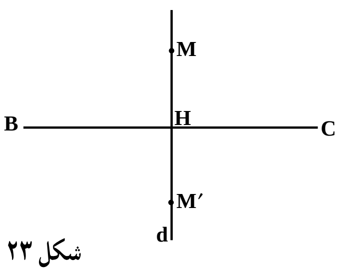
> **راهبرد حل مسأله‌های ترسیمهای هندسی**
>
> **گام اوّل:** مسألهٔ ترسیم را حل شده فرض می‌کنیم.
>
> **گام دوم:** مسألهٔ ترسیم را تبدیل به یافتن یک نقطهٔ مجهول می‌کنیم.
>
> **گام سوم:** شرطهای مسأله را به دو جزء تقسیم می‌کنیم به‌طوری‌که هرکدام از شرطها، به یک مکان هندسی برای نقطهٔ مجهول تبدیل شود و هر یک از این دو مکان هندسی، باید **خط راست** یا **دایره** باشد.
>
> **گام چهارم:** نقطهٔ مجهول، فصل مشترک این دو مکان هندسی است.

مسألهٔ ۱: رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

پاره‌خط BC داده شده است. می‌خواهیم عمودمنصف این پاره‌خط را رسم کنیم.

حل:

گام اول: مسأله را حل شده فرض می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم که خط d عمودمنصف پاره‌خط BC باشد.



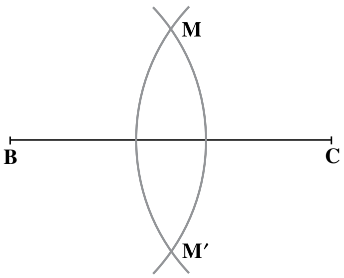
شکل ۲۳

۱ــ جورج پولیا، خلاقیت ریاضی

گام دوم: برای مشخص شدن خط d، کافی است دو نقطه متمایز از آن را پیدا کنیم. پس مجهول ما پیدا کردن دو نقطهٔ متمایز از خط d است. این دو نقطه می‌تواند هر دو نقطهٔ دلخواه مانند M و M' روی خط d باشد که در دو طرف پاره‌خط BC قرار دارند و از C و B به یک فاصله‌اند.

گام سوم: حال به پیدا کردن شرطهای این نقطه می‌پردازیم و سعی می‌کنیم که این شرطها را به دو جزء تقسیم کنیم به طوری‌که هرکدام از این شرطها، به یک مکان هندسی برای نقطهٔ مجهول M تبدیل شود. چون M روی عمودمنصف پاره‌خط BC است و عمودمنصف هر پاره‌خط مکان هندسی نقطه‌ای است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله باشد، پس نقطه مجهول M روی دو دایره با شعاع یکسان و به مرکزهای B و C قرار دارد، یعنی این مسأله تبدیل به مسألهٔ دو مکان هندسی شد.

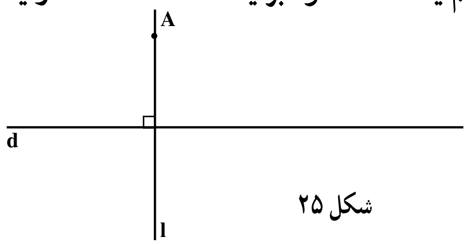
گام چهارم: این دو مکان هندسی، دو دایره به شعاع دلخواه بزرگتر از نصف BC است زیرا می‌خواهیم که فصل مشترک دو دایره دو نقطه باشد. بنابراین، به مرکز B و شعاع دلخواه بیش از نصف BC دایره‌ای رسم می‌کنیم و با همین شعاع، دایرهٔ دیگری به مرکز C رسم می‌کنیم. این دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ M و M' قطع می‌کنند. چون نقطه‌های M و M' روی دو دایره با شعاعهای مساوی هستند، بنابراین روی عمودمنصف BC قرار می‌گیرند. پس با وصل کردن M به M'، عمودمنصف خواسته شده رسم می‌شود.



شکل ۲۴

تمرین ـــ مراحل رسم نیمساز یک زاویهٔ داده شده را با استفاده از استراتژی حل مسأله‌های ترسیمهای هندسی توضیح دهید.

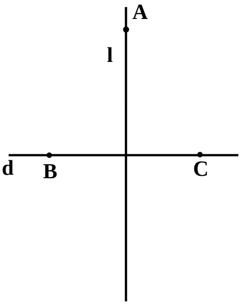
مسألهٔ ۲: رسم یک خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطهٔ خارج آن



شکل ۲۵

حل: خط d و نقطهٔ A خارج آن داده شده‌اند. می‌خواهیم از A خطی رسم کنیم که بر d عمود باشد[1].

۱ــ این مراحل را در هندسه ۱ انجام داده‌اید.



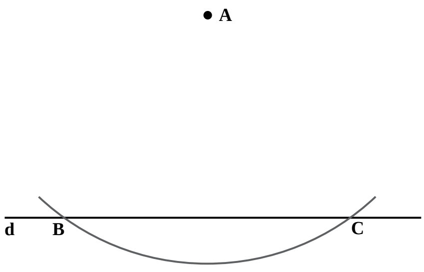
شکل ۲۶

فرض می‌کنیم مسأله حل شده و خط l از نقطهٔ A بر خط d عمود شده است.

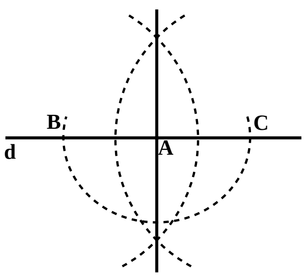
اگر بتوانیم از مسأله‌هایی که تا به حال حل کرده‌ایم استفاده کنیم، کار آسانتر می‌شود. در مسأله۱ با رسم عمودمنصف یک پاره‌خط آشنا شدیم. اگر خط l عمودمنصف یک پاره‌خط باشد که روی d قرار گرفته است، در این صورت هر نقطه روی l از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی فرض کنیم دو نقطه B و C روی d چنان وجود دارد که l عمود منصف BC باشد.

پس اگر B و C را پیدا کنیم و عمودمنصف آن‌را رسم نماییم، عمودمنصف حاصل از A می‌گذرد و بر d عمود است.

حالا مسألهٔ ما تبدیل به پیدا کردن نقطه‌های B و C روی خط d شده است که خط l عمودمنصف آنها می‌باشد. چون A روی عمودمنصف BC قرار دارد، بنابراین A از B و C به یک فاصله است یا به عبارتی، B و C روی دایره‌ای به مرکز A قرار دارند. این دایره یکی از **دو مکان هندسی** ما است.امّا چون B و C روی خط d قرار دارند، پس خط d مکان هندسی دیگر است. حال با استفاده از استراتژی دو مکان هندسی،B و C روی این دو مکان قرار دارند. برای پیدا کردن B و C، به مرکز A و به شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا d را در دو نقطه قطع کند، آنها را B و C می‌نامیم. حال B و C نقاط مطلوب هستند و مسأله حل شده است، زیرا عمودمنصف BC خط مورد نظر است.



شکل ۲۷



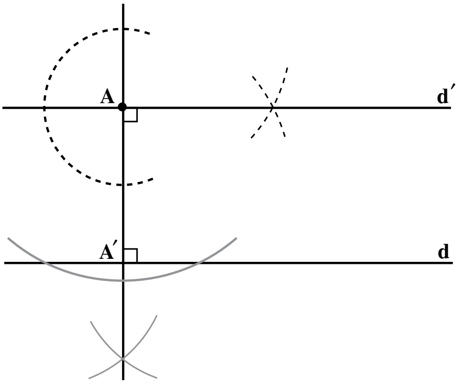
شکل ۲۸

مسألهٔ ۳ : رسم خطی عمود بر خط داده شده از یک نقطه روی آن

یعنی فرض کنیم خط d و نقطه A روی آن داده شده‌اند. می‌خواهیم از A عمودی بر d رسم کنیم این مسأله را با روشی مانند مسأله قبلی حل می‌کنیم، یعنی نقطه‌های B و C را روی d

طوری پیدا می‌کنیم که A وسط آنها باشد. بنابراین، دایره‌ای به مرکز A و شعاع اختیاری رسم می‌کنیم تا d را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. حال طبق مسألهٔ قبلی، عمودمنصف BC را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف از A می‌گذرد و بر d عمود است.

مسألهٔ ۴ : رسم خطی موازی یک خط از یک نقطه خارج آن خط



خط d و نقطهٔ A خارج آن داده شده است. می‌خواهیم از نقطهٔ A خطی به موازات d رسم کنیم. برای این منظور ابتدا از نقطهٔ A بر خط d عمودی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ A′ قطع کند. سپس از نقطهٔ A خطی عمود بر AA′ رسم می‌کنیم و آن را d′ می‌نامیم. حال می‌توان ادعا کرد که d و d′ موازی یکدیگرند (چرا؟).

با توجه به چهار مسأله حل شده فوق، می‌توان تعداد زیادی از مسأله‌های ترسیمهای هندسی را حل کرد.

مسأله‌ها

۱. خط d و نقطهٔ A غیر واقع بر آن، داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم R باشد. با توجه به اندازهٔ R روی تعداد جوابهای مسأله بحث کنید.

۲. دو نقطهٔ A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. آیا مسأله همواره جواب دارد؟

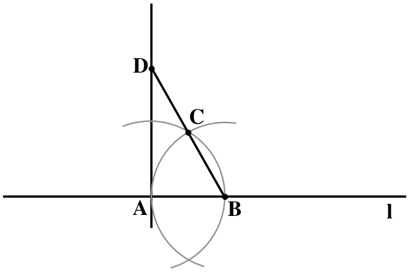
۳. دایرهٔ (C) و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایرهٔ (C) تعیین کنید که از خط Δ به فاصلهٔ معلوم l باشد. مسأله چند جواب دارد؟

۴. از مثلث ABC، اندازهٔ ضلعهای $AB = c$ ، $AC = b$ و طول ارتفاع $AH = h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۵. مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های : ضلع $BC = a$ ، میانه‌های $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$ ، رسم کنید.

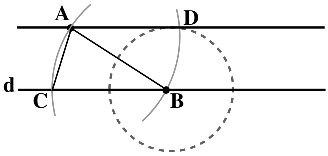
۶. ابوالوفاء بوزجانی (۳۸۸ــ۳۲۸ هـ.ق) ریاضیدان ایرانی برای رسم خط عمود از نقطه A واقع بر خط مفروض l روش زیر را به کار برده است : نقطهٔ دلخواه B را روی خط l اختیار می‌کنیم.

dهانهٔ پرگار را به اندازهٔ پاره‌خط AB باز می‌کنیم دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع AB رسم می‌کنیم یک نقطهٔ برخورد این دو دایره را C می‌نامیم. از B به C وصل می‌کنیم و پاره‌خط BC را از طرف نقطهٔ C به اندازهٔ خودش تا نقطه D امتداد می‌دهیم. از D به A وصل می‌کنیم. خط AD در نقطهٔ A بر خط l عمود است.



دلیل درستی روش ابوالوفاء را بنویسید.

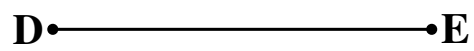
۷. خط d و نقطهٔ A خارج آن، داده شده‌اند. از نقطهٔ A خطی به موازات خط d رسم کنید.



ابوالوفاء بوزجانی مسأله را چنین حل می‌کند:

نقطهٔ دلخواه B را روی خط d اختیار می‌کنیم و دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ پاره‌خط AB می‌گشاییم. به مرکز B و به شعاع BA یک دایره رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند، آنگاه به مرکز A و با همان شعاع قبلی دایرهٔ دیگری رسم می‌نماییم. سپس به مرکز B و به شعاعی برابر پاره‌خط AC دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد دو دایره به مرکزهای B و A را D می‌نامیم. از A به D وصل می‌کنیم. AD، خطی است که از نقطهٔ A به موازات خط d رسم می‌شود. دلیل درستی روش ابوالوفاء را بنویسید.

۸. مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد.



۹. زاویهٔ XOY داده شده است روی نیم‌خط O′X′ زاویه‌ای به رأس O′ و مساوی زاویهٔ XOY رسم کنید.



قضیه وجود مثلث

در ریاضیات معمولاً مسأله‌ها یا قضیه‌هایی که با اثبات وجود شیء یا ویژگی، سروکار دارند دارای برهانی مشکل هستند و معمولاً در فرآیند اثبات به روندی ساختنی نیاز است. در آموزش ریاضیات دبیرستانی به خاطر پیچیدگی برهان آن از دامن زدن به این گونه قضیه‌ها و مسائل پرهیز می‌شود و در صورت لزوم بصورت یک حکم بدیهی پذیرفته می‌شود. قضیه وجود مثلث نمونه‌ای از اینگونه قضیه‌هاست که با اثبات وجود (مثلث) سروکار دارد.

بررسی اثبات این قضیه و پی بردن به پیچیدگی اثبات می‌تواند مفید باشد.

قضیه وجود مثلث: سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c داده شده‌اند. اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که ضلعهای آن a ، b و c هستند. ابتدا (با فهمیدن مسأله) فرض و حکم آن را مشخص می‌کنیم.

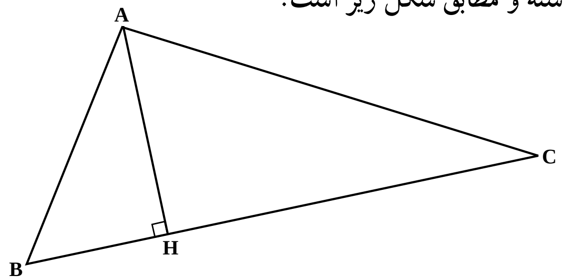
فرض: a ، b و c سه عدد حقیقی مثبت و $a+b>c$ ، $a+c>b$ ، $c+b>a$

حکم: مثلثی چون ABC وجود دارد به‌طوری که a ، b و c اندازه اضلاع آن هستند.

برهان: برای سادگی و بدون کاستن از کلّیت می‌توان فرض کرد $a \geq b \geq c > 0$. چرا؟

پاره‌خط BC را به اندازه a انتخاب می‌کنیم. در این صورت حکم قضیه معادل است با یافتن نقطه‌ای مانند A طوری که $AC=b$ و $AB=c$.

«مسأله را حل شده فرض می‌کنیم» یعنی فرض می‌کنیم مثلث ABC مورد نظر وجود داشته و مطابق شکل زیر است.



H را پای ارتفاع وارد بر BC می‌گیریم

نقطه H بین B و C است (چرا؟). قرار می‌دهیم

$$BH = x \ , \ \ AH = y$$

در این صورت $HC = a - x$.

طبق قضیه فیثاغورس روابط زیر برقرارند.

$$y^۲ = c^۲ - x^۲ \qquad (۱)$$

$$y^۲ = b^۲ - (a - x)^۲ \qquad (۲)$$

با اندکی محاسبه (محاسبات را انجام دهید!) از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

$$x = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲a} \qquad (۳)$$

$$y = \sqrt{c^۲ - x^۲} \qquad (۴)$$

رابطه‌های (۴) و (۱) با رابطه‌های (۳) و (۲) معادل است (نشان دهید!) یعنی اگر x و y در (۱) و (۲) صدق کنند آنگاه در (۳) و (۴) نیز صدق می‌کنند و برعکس.

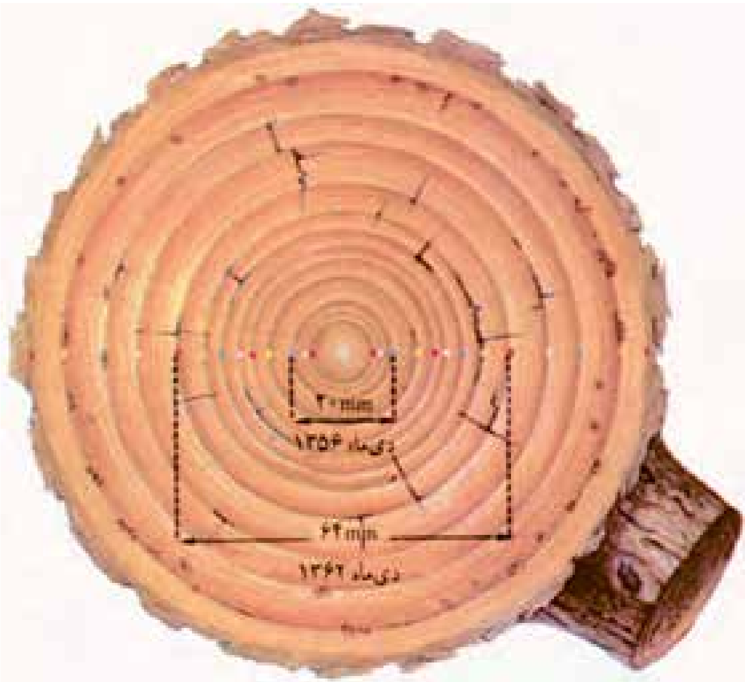
اکنون به شروع کار بازمی‌گردیم. سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c با شرط $a \geq b \geq c > ۰$ داده شده‌اند. قرار می‌دهیم $x = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲a}$ و $y = \sqrt{c^۲ - x^۲}$.

باتوجه به فرض قضیه x و y هر دو اکیداً مثبت هستند. (بعنوان یک تمرین سر راست ثابت کنید $x > ۰ \ , \ y > ۰$) برای رسم مثلث به کمک خط‌کش و پرگار ضلع BC را به‌طول a رسم می‌کنیم و روی آن BH را به اندازه x جدا می‌کنیم. سپس از نقطه H عمودی رسم کرده و روی آن به اندازه y جدا می‌کنیم نقطه A (نقطه مطلوب) به‌دست می‌آید. به آسانی می‌توان دید که

$$AC = b \ , \ \ AB = c$$

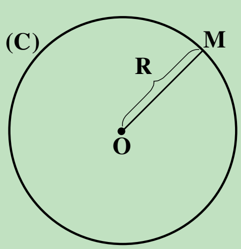
فصل ۲

دایره

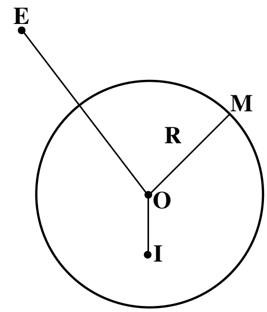


تصویر، حلقه‌های سالانهٔ یک درخت بادام را که در دی ماه ۱۳۶۶ قطع شده است نشان می‌دهد. هر حلقه رشد درخت را در یک سال مشخص نشان می‌دهد. وجود ۱۳ حلقه نشان می‌دهد که این درخت در دی ماه ۱۳۶۶ سیزده ساله بوده است، یعنی رشد درخت در سال ۱۳۵۳ شروع شده است.

دایره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که فاصله‌اش از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطهٔ ثابت مرکز دایره و مقدار ثابت اندازهٔ شعاع دایره نامیده می‌شوند.



دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نشان می‌دهند.

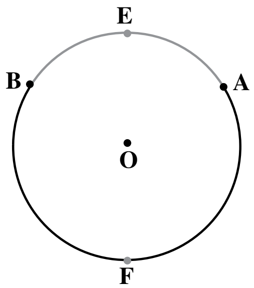


هر دایره، صفحه را به سه بخش افراز[1] می‌کند :

۱) داخل دایره، مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند I، که فاصلهٔ آنها از مرکز دایره، کمتر از شعاع دایره است، $OI< R$

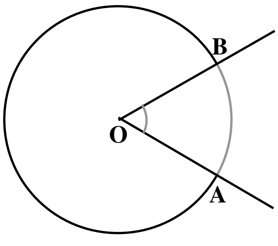
۲) روی دایره، مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند M که فاصلهٔ آنها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.

۳) خارج دایره، مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند E که فاصلهٔ آنها از مرکز دایره، از شعاع دایره بیشتر است ؛ $OE >R$

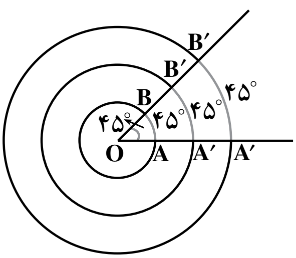


دو نقطهٔ A و B واقع بر یک دایره، دو **کمان** $\widehat{AB}$ را روی آن دایره جدا می‌کند. در این حالت برای مشخص کردن آنها، از نقطه‌ای اختیاری واقع بر هر یک از آن دو کمان استفاده می‌شود، مانند کمانهای $\widehat{AEB}$ و $\widehat{AFB}$ در شکل مقابل.

۲ــ۱ــ زاویهٔ مرکزی، وتر و مماس



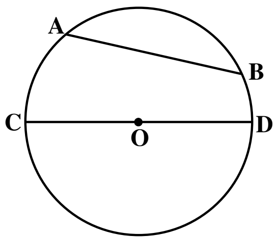
دایره‌ای به مرکز O را درنظر می‌گیریم و دو نقطهٔ A و B را روی آن انتخاب می‌کنیم. نیم‌خطهای OA و OB دو زاویه به‌وجود می‌آورند که چون رأس آنها مرکز دایره است، **زاویه‌های مرکزی** نامیده می‌شوند. هریک از این زاویه‌های مرکزی یک کمان از دایره جدا می‌کنند که به آن، کمان نظیر آن زاویهٔ مرکزی گفته می‌شود.



بنا به قرارداد، اندازهٔ کمان نظیر هر زاویهٔ مرکزی در دایره برحسب درجه، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی به آن کمان است.

وقتی اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ برابر °۴۵ است، اندازهٔ کمانهای $\widehat{AB}$، $\widehat{A'B'}$ و $\widehat{A'B'}$ از دایره‌هایی به مرکز O نیز مساوی °۴۵ هستند.

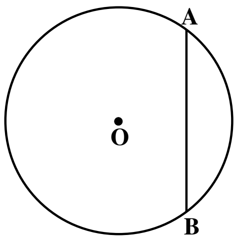
۱ــ منظور از افراز یک مجموعه، تقسیم آن به زیرمجموعه‌هایی ناتهی است که اشتراک آنها تهی و اجتماع آنها تمام مجموعهٔ اولیه باشد.



پاره‌خطی که دو نقطهٔ متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند، **وتر** آن دایره نامیده می‌شود. در شکل روبه‌رو پاره‌خطهای AB و CD وترهایی از دایره به مرکز O می‌باشند.

وتری که از مرکز دایره می‌گذرد، **قطر** آن دایره نامیده می‌شود. در شکل روبه‌رو، CD قطر دایره است. هر قطر دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند. این کمانها نیمدایره نامیده می‌شوند.

فعالیت ۲ـ۱



وتر AB در دایره‌ای به مرکز O داده شده است :

۱ـ قطری از این دایره را که بر وتر AB عمود است، رسم کنید، آن را DE و نقطهٔ برخوردش با وتر AB را H بنامید.

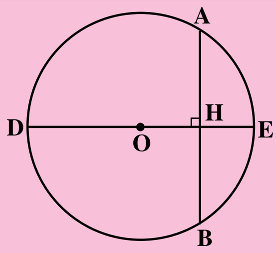
۲ـ از نقطهٔ O به نقطه‌های A و B وصل کنید. مثلث OAB چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

۳ـ دلیل درستی تساویهای زیر را توضیح دهید.

الف) $AH = HB$ ب) $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$ و $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

نتیجهٔ فعالیت بالا را می‌توانیم به‌صورت قضیهٔ زیر خلاصه کنیم :

قضیه: در هر دایره، قطرعمود بر هر وتر، آن وتر و کمانهای نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



تمرین ۱ ـ ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.

تمرین ۲ـ ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.

فعالیت ۲ــ۲

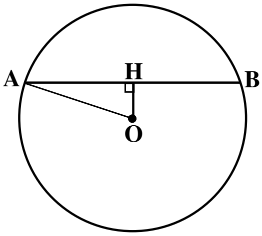
۱ــ دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ــ وتری به‌طول ۲/۴ سانتی‌متر در این دایره رسم کنید و این وتر را AB بنامید.

۳ــ فاصلهٔ نقطهٔ O مرکز دایره، از این وتر، یعنی طول پاره‌خط OH را به‌دست آورید.

۴ــ مکان هندسی نقطهٔ H وسط وترهایی از این دایره که طولشان ۲/۴ سانتی‌متر است را تعیین کنید. آیا این مکان یک دایره است؟

نظیر فعالیت بالا را در مورد دایرهٔ C(O,R) و وتر AB به طول l از این دایره انجام دهید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



مثال: دایرهٔ C(O,۲۶) داده شده است. اگر فاصلهٔ وتر AB از مرکز دایره برابر ۱۰ باشد، طول وتر AB را به‌دست آورید.

حل: وسط وتر AB را H می‌نامیم و از O به H و A وصل می‌کنیم. در مثلث OAH داریم :

$$OA^{۲} = AH^{۲} + OH^{۲}$$

پس :

$$(۲۶)^{۲} = AH^{۲} + (۱۰)^{۲}$$

بنابراین :

$$AH^{۲} = ۵۷۶ \Rightarrow AH = ۲۴$$

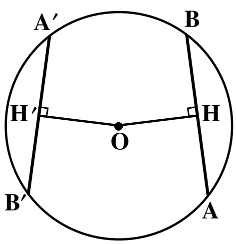
درنتیجه :

$$AB = ۲AH = ۴۸$$

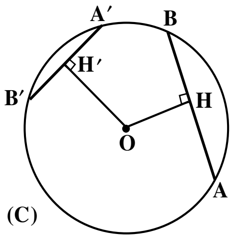
تمرین ۱ ــ ثابت کنید در یک دایره، کمانهای نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند، و بعکس.

تمرین ۲ ــ ثابت کنید در هر دایره، وترهای متساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بعکس. یعنی در شکل زیر :

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$

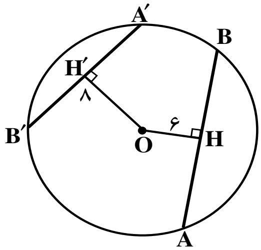


فعالیت ۲ــ۳



۱ــ در دایرهٔ C(O,۱۰) وتر AB به طول ۱۶ و وتر A′B′ به طول ۱۲ داده شده‌اند.

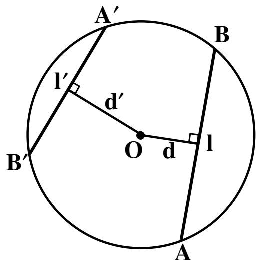
فاصلهٔ هریک از این دو وتر از مرکز دایره یعنی OH و OH′ را به‌دست آورید.



۲ــ در دایرهٔ C(O,۱۰) فاصلهٔ وتر AB از مرکز دایره برابر ۶ و فاصلهٔ وتر A′B′ از مرکز دایره مساوی ۸ است. طول وترهای AB و A′B′ را به‌دست آورید.

۳ــ چه رابطه‌ای بین فاصلهٔ وترها از مرکز دایره و طول آنها می‌یابید؟

۴ــ آیا این رابطه همیشه برقرار است؟



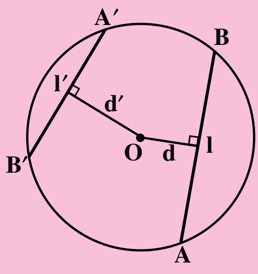
۵ــ در دایرهٔ C(O,R)، وتر AB را به طول l و وتر A′B′ را به طول l′ در نظر بگیرید. فاصلهٔ مرکز دایره از این دو وتر را به ترتیب d و d′ بنامید. آیا رابطه‌های $d^۲ + \frac{l^۲}{۴} = R^۲$ و $d'^۲ + \frac{l'^۲}{۴} = R^۲$ برقرارند؟

به کمک رابطه‌های بالا ثابت کنید :

$$l \geq l' \Leftrightarrow d \leq d'$$

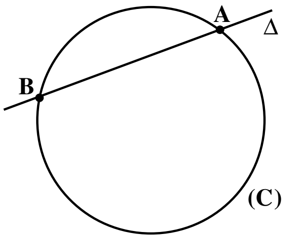
نتیجه فعالیت بالا را به‌صورت قضیهٔ زیر می‌توانیم بیان کنیم :

قضیه: در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیکتر است، و بعکس.



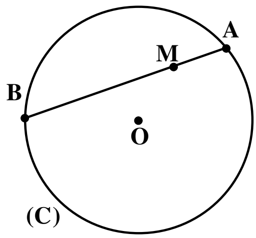
تمرین ــ ثابت کنید، کوچکترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.

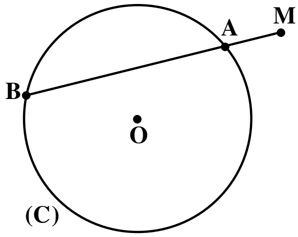
۲ــ۱ــ۱ــ خطهای قاطع و مماس نسبت به دایره: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع

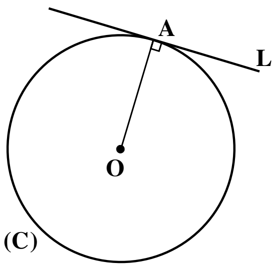


کند، **قاطع نسبت به دایره** یا به‌طور خلاصه، قاطع[۱] نامیده می‌شود. مانند قاطع Δ که دایرهٔ (C) را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است.

اگر قاطع رسم شده از نقطهٔ M واقع در صفحهٔ یک دایره، آن دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کند، آنگاه پاره‌خطهای MA و MB را دو قطعهٔ قاطع رسم شده از نقطهٔ M و یا به‌صورت خلاصه، دو قطعهٔ قاطع می‌نامند.



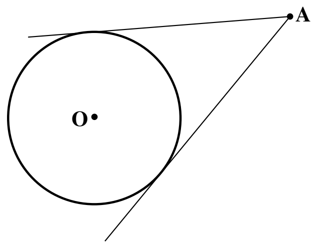




نقطهٔ A را روی دایرهٔ به مرکز O در نظر می‌گیریم. **خط L که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر شعاع OA عمود است، خط مماس بر دایره در نقطهٔ A نامیده می‌شود.**

یک ویژگی مهم این خط مماس، آن است که فقط در نقطهٔ A با دایره مشترک است. نقطهٔ A را نقطهٔ تماس خط L با دایره می‌نامند.

از هر نقطه خارج دایره می‌توان دو مماس بر آن دایره رسم کرد.

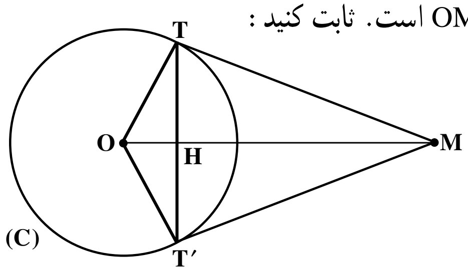


قضیه: طول مماسهای رسم شده بر یک دایره از هر نقطهٔ خارج آن با هم برابرند.

تمرین ۱ــ قضیهٔ بالا را ثابت کنید.

۱ــ Secant

تمرین ۲ــ دو خط MT و ′MT در نقطه‌های T و ′T بر دایرهٔ C(O,R) مماسند. H نقطهٔ برخورد وتر ′TT با خط OM است. ثابت کنید :



الف ــ خط OM نیمساز زاویه‌های ′TMT و ′TOT است.

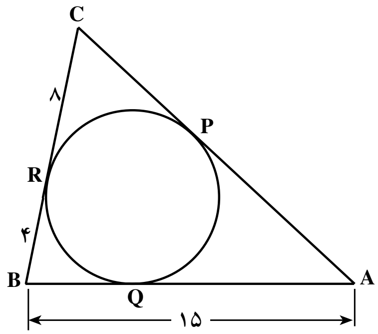
ب ــ خط OM عمود منصف پاره‌خط ′TT است.

پ ــ $OH.OM = R^۲$

تمرین ۳ــ در شکل بالا ثابت کنید :

الف ــ $TT'^۲ = ۴OH.HM$

ب ــ $TT'.OM = ۲R.MT$



مثال ۱: در شکل مقابل، ضلعهای مثلث ABC در نقطه‌های P، Q و R بر دایره مماسند. با توجه به مقدارهای داده شده، اندازهٔ ضلع AC را تعیین کنید.

حل: چون مماسهای رسم شده از یک نقطه بر یک دایره با هم برابرند، بنابراین :

$BQ = BR = ۴$

از آنجا : $AQ = AB - BQ$

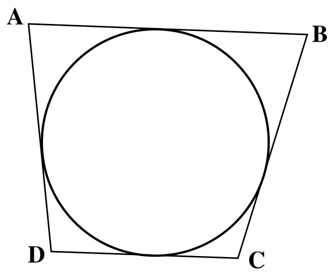
پس : $AQ = ۱۵ - ۴ = ۱۱$

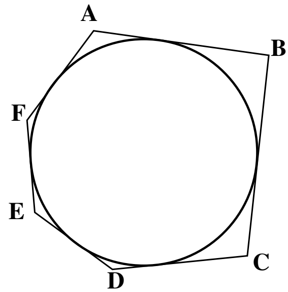
$AP = AQ = ۱۱$

از طرفی $CP = CR = ۸$

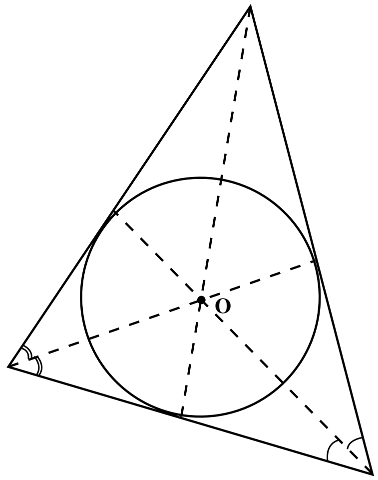
درنتیجه $AC = AP + PC = ۱۱ + ۸ = ۱۹$

مثلث مثال بالا، نمونه‌ای از یک **چند ضلعی محیطی** است. هرگاه همهٔ ضلعهای یک چندضلعی بر یک دایره مماس باشند، چندضلعی را **محیطی** یا **محیط بر دایره** می‌نامند. مانند چهارضلعی ABCD و شش‌ضلعی ABCDEF، در این صورت دایره را محاط در چندضلعی یا **دایرهٔ محاطی** چندضلعی می‌نامند.



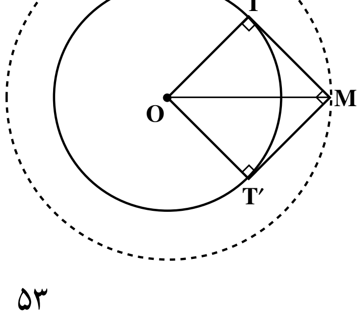


هر مثلث می‌تواند بر یک دایره محیط شود. مرکز این دایره نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث است (چرا؟). این دایره را دایرهٔ محاطی داخلی مثلث می‌گوییم.



باید توجه داشت که هر مثلث سه دایرهٔ محاطی خارجی نیز دارد. این دایره‌ها هرکدام بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماسند. مرکز این دایره‌ها چه نقطه‌هایی هستند؟

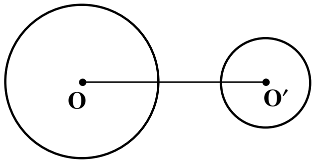
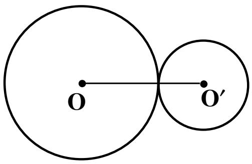
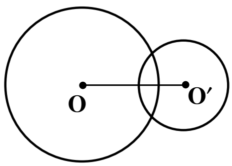
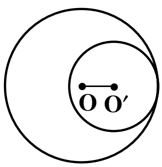
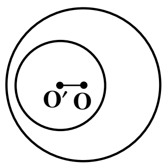
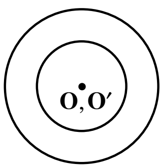
مثال ۲: دایرهٔ $C(O,R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که مماسهای رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم عمود باشند.



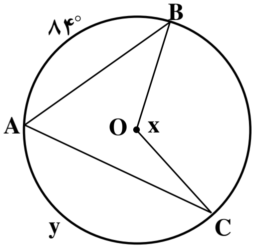
حل: فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و M یکی از نقطه‌هایی باشد که از آن، دو مماس عمود بر هم MT و MT' بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم شده است. از O به نقطه‌های تماس T و T' وصل می‌کنیم. چهارضلعی $OTMT'$ مربع است. زیرا چهار زاویهٔ قائمه دارد و دو ضلع مجاورش نیز برابرند $(OT = OT' = R)$. در این مربع، $OM = R\sqrt{۲}$ مقدار ثابتی

است. نشان دهید مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\sqrt{2}$ است.

۲ــ۱ــ۲ــ وضع دو دایره نسبت به هم: وضع دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ ، می‌توان به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد.

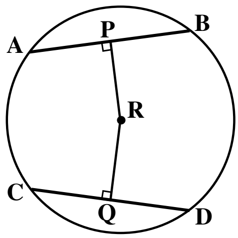
دو دایره برون هم	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = ۰$	

مسأله‌ها



۱. الف) اگر $\widehat{y}=$ ۱۴۰°، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ x را به‌دست آورید.

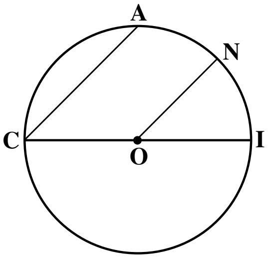
ب) اگر $\hat{x}=$ ۱۶۵°، آنگاه اندازهٔ کمان $\widehat{y}$ را به‌دست آورید.



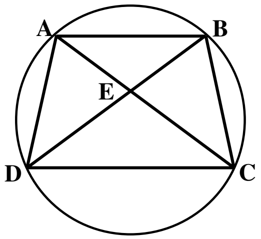
۲. با توجه به شکل روبه‌رو :

الف) اگر طول شعاع ۱۰ و PR = ۶ ، آنگاه طول AP و AB را به‌دست آورید.

ب) اگر RC = $\sqrt{۲}$ و CQ = RQ ، آنگاه طول پاره‌خط‌های CQ، DQ و CD را به‌دست آورید.



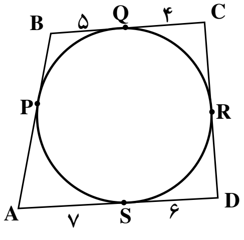
۳. در دایرهٔ به مرکز O و به قطر CI، داریم CA||ON .
ثابت کنید $\widehat{AN}=\widehat{NI}$



۴. با توجه به شکل نشان دهید :

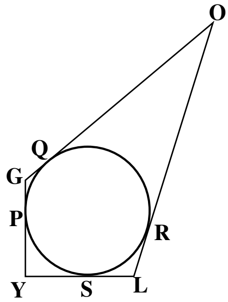
الف) اگر AD = BC ، آنگاه AC = BD .

ب) اگر AC = BD ، آنگاه AD = BC .

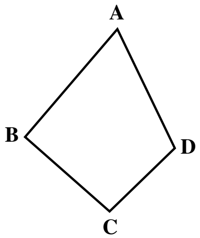


۵. اگر P، Q، R و S، نقطه‌های تماس ضلعهای چهارضلعی ABCD با دایره باشند، آنگاه محیط این چهارضلعی را به‌دست آورید.

۶. ضلعهای چهارضلعی محیطی GOLY بر دایره مماسند (شکل روبه‌رو)، ثابت کنید : $GO + LY = OL + GY$



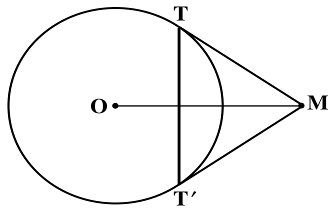
۷. در چهارضلعی ABCD (شکل روبه‌رو)، $AB + CD = AD + BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.



راهنمایی: روی ضلع AB، پاره‌خط $AM = AD$ و روی ضلع BC پاره‌خط $CN = CD$ را جدا کرد. از ویژگی مثلثهای متساوی‌الساقین استفاده کنید.

۸. زاویهٔ بین دو مماس رسم شده از نقطهٔ A بر دایرهٔ $C(O,۵)$ ، برابر ۶۰° است. طول پاره‌خط OA را به‌دست آورید.

۹. دایرهٔ $C(O,۶)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱۲ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خطهای MT و MT' بر این دایره مماسند. (T و T' نقطه‌های تماسند).

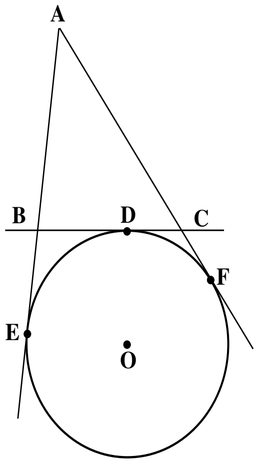


الف ــ طول مماسهای MT و MT' را تعیین کنید.

ب ــ طول وتر TT' را به دست آورید.

پ ــ اندازهٔ زاویهٔ TMT' و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.

۱۰. خطهای AE، AF و BC به ترتیب در نقطه‌های E، F و D بر دایرهٔ (O) مماس هستند. مماس BC، خطهای AE و AF را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطهٔ D روی دایره بین دو نقطهٔ ثابت E و F ، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.

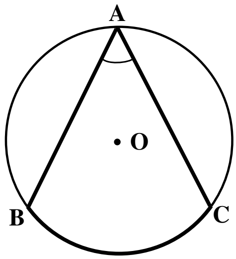


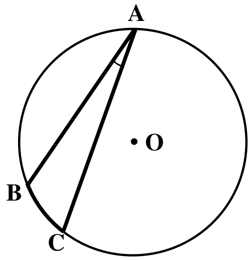
۱۱. شعاعهای دو دایرهٔ هم‌مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگتر را که بر دایرهٔ کوچکتر مماس است پیدا کنید.

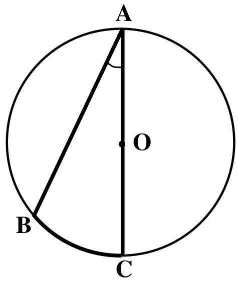
۲ــ۲ــ زاویهٔ محاطی

زاویه‌ای که رأسش روی دایره و ضلعهایش دو وتر از دایره باشند، زاویهٔ محاطی نامیده می‌شود.

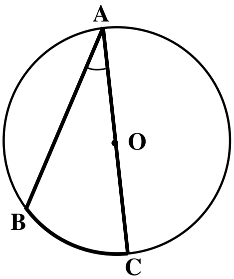
کمانی از دایره را که به دوضلع زاویهٔ محاطی محدود و در داخل زاویه واقع است ، کمان روبه‌رو به آن زاویه می‌نامند.







فعالیت ۲ــ۴



در دایرهٔ به مرکز O زاویهٔ محاطی BAC را که ضلع AC از آن، قطر دایره است،در نظر بگیرید.

۱ــ از نقطهٔ B به O مرکز دایره وصل کنید. OAB چه نوع مثلثی است؟

۲ــ زاویهٔ مرکزی BOC چند برابر زاویهٔ محاطی BAC است؟ چرا؟

۳ــ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید :

$$B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC}$$

بنابراین
$$۲B\hat{A}C = \overset{\frown}{BC}$$

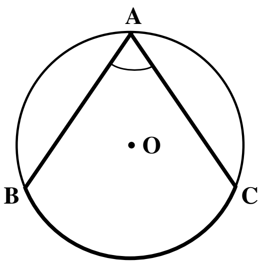
درنتیجه :
$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

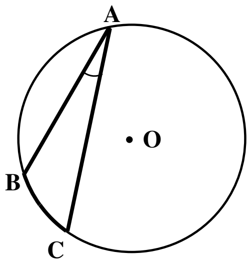
نتیجهٔ فعالیت بالا را بنویسید.

تمرین ۱ ــ دو ضلع زاویهٔ محاطی BAC در دو طرف نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (C) واقع است.

ثابت کنید $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

راهنمایی: قطری از دایره را که از رأس A می‌گذرد رسم کنید.

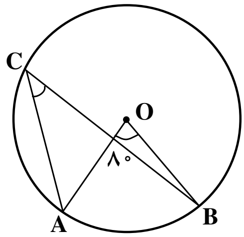




تمرین ۲ــ دو ضلع زاویهٔ محاطی BAC در یک طرف نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (C) قرار دارد. ثابت کنید، $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

با توجه به فعالیت (۲ــ۴) و تمرینهای بالا نتیجه می‌گیریم که :

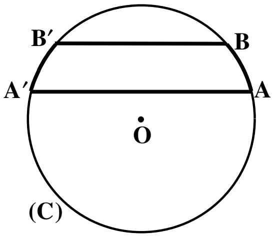
قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.



مثال: در دایرهٔ به مرکز O اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۸۰° است. اندازهٔ زاویهٔ محاطی ACB چه‌قدر است؟

حل: چون اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی با کمان روبه رویش برابر است، پس $\overset{\frown}{AB} = 80^\circ$. بنابراین داریم :

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

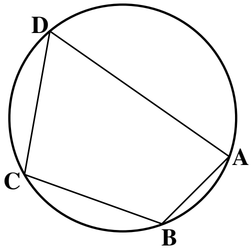


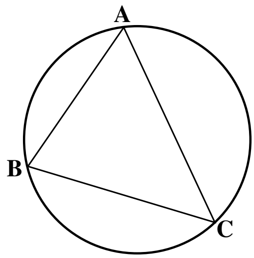
تمرین ــ ثابت کنید در هر دایره کمانهای محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

راهنمایی: از ویژگی زاویهٔ محاطی، یا قطر عمود بر وتر استفاده کنید.

چندضلعی محاطی

اگر همهٔ رأسهای یک چندضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، آن را **چند ضلعی محاطی** و یا **چند ضلعی محاط** در دایره می‌نامند. مانند مثلث ABC و چهارضلعی ABCD، که هرکدام در یک دایره محاطند. دایره را **محیط** بر چندضلعی یا دایرهٔ **محیطی** چندضلعی می‌نامند.





هر مثلث می‌تواند در یک دایره محاط شود. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، محل برخورد عمودمنصفهای ضلعهای مثلث است. چرا؟

تمرین ــ ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند.

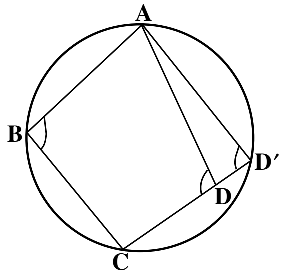
عکس حکم بالا را نیز می‌توان ثابت کرد.

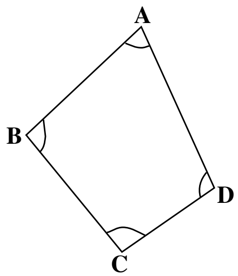
قضیه: اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند، آن چهارضلعی محاطی است.

برهان: فرض می‌کنیم در چهارضلعی ABCD، هر دو زاویهٔ روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند. یعنی :

$\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$ (۱)

$\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$ (۲)





بر سه نقطهٔ A و B وC یک دایره می‌گذرد ؛ ثابت می‌کنیم که این دایره از نقطهٔ D نیز می‌گذرد.

برای اثبات این ادعا از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

اگر این دایره از رأس D نگذرد، نقطهٔ برخورد خط CD با دایره را D′ می‌نامیم و از D′ به A وصل می‌کنیم. چون چهارضلعی ABCD′ محاطی است، بنابراین :

$\hat{B}+\hat{D'}=180^\circ$ (۳)

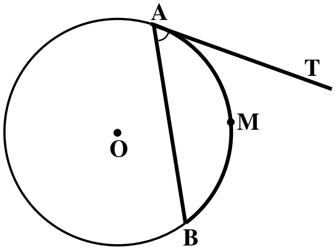
از رابطه‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که :

$\hat{D}=\hat{D'}$ (۴)

چون زاویهٔ D زاویهٔ خارجی مثلث ADD′ است، بنابراین :

$\hat{D}>\hat{D'}$ (۵)

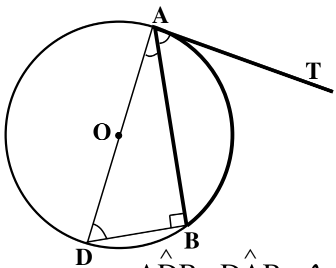
که رابطهٔ (۵) با رابطهٔ (۴) در تناقض است. درنتیجه فرض ما، که دایره از رأس D نمی‌گذرد نادرست، و حکم قضیه برقرار است.



۲ــ۳ــ زاویهٔ ظلی

زاویه‌ای که رأسش روی دایره است، یک ضلعش دایره را قطع می‌کند و ضلع دیگرش بر دایره مماس است، زاویهٔ ظلی نامیده می‌شود؛ مانند زاویهٔ TAB در شکل روبه‌رو. کمانی از دایره را که به زاویهٔ ظلی محدود است، کمان نظیر، یا کمان روبه‌رو به زاویهٔ ظلی می‌نامند.

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی، برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.



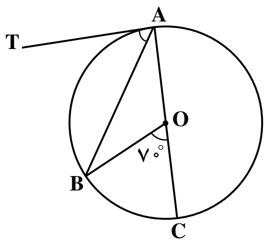
برهان: زاویهٔ ظلی BAT را در دایرهٔ به مرکز O در نظر می‌گیریم. قطر AD از این دایره را که از رأس A می‌گذرد رسم می‌کنیم و از D به نقطهٔ B وصل می‌نماییم. زاویهٔ ABD محاطی روبه‌رو به قطر، مساوی ۹۰° است. پس

$$A\hat{D}B + D\hat{A}B = ۹۰^\circ \quad (۱)$$

از طرفی

$$D\hat{A}B + B\hat{A}T = ۹۰^\circ \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $B\hat{A}T = A\hat{D}B$ امّا می‌دانیم که $A\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$. پس $B\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$.



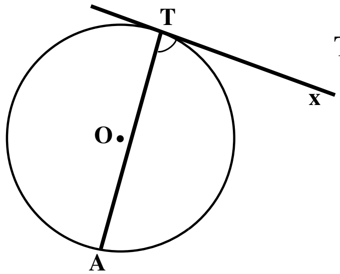
مثال ۱: AC قطر دایره و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی BOC برابر ۷۰° و خط AT در نقطهٔ A بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ ظلی TAB را تعیین کنید.

حل: چون $B\hat{O}C = ۷۰^\circ$، درنتیجه $\overset{\frown}{BC} = ۷۰^\circ$ است.

از طرفی $\widehat{ABC} = ۱۸۰^\circ$ است. پس :

$$\widehat{AB} = ۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ = ۱۱۰^\circ$$

بنابراین :



$$T\hat{A}B = \frac{\widehat{AB}}{۲} = ۵۵^\circ$$

مثال ۲: اگر اندازهٔ زاویه ظلی ATX مساوی $(۲\alpha - ۶)^\circ$ و اندازهٔ کمان $\widehat{AT}$ برابر $(۳\alpha + ۳۳)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ ATX را بیابید.

حل: چون اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی مساوی نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است، پس داریم :

$$A\hat{T}X = \frac{\widehat{AT}}{۲}$$

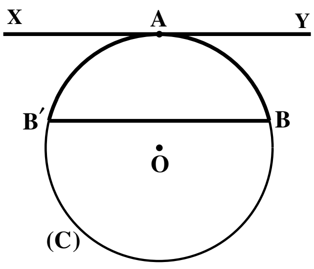
از آنجا داریم :

$$۲\alpha - ۶ = \frac{۳\alpha + ۳۳}{۲}$$

و یا

$$۴\alpha - ۱۲ = ۳\alpha + ۳۳ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

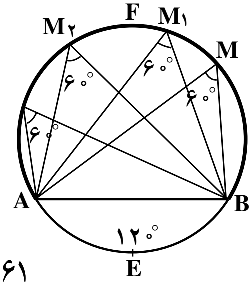
درنتیجه $$A\hat{T}X = (۲ \times ۴۵ - ۶)^\circ = ۸۴^\circ$$



تمرین ــ خط XY در نقطهٔ A بر دایرهٔ (C) مماس است وتر BB′ از دایره را موازی XY رسم کرده‌ایم. ثابت کنید :

$$\widehat{AB} = \widehat{AB'}$$

۲ــ۴ــ کمان درخور یک زاویه



در دایرهٔ C(O,R) کمان $\widehat{AEB} = ۱۲۰^\circ$ را اختیار و وتر AB را رسم می‌کنیم.

نقطهٔ دلخواه M را روی کمان دیگر $\widehat{AB}$ (روی $\widehat{AFB}$) در نظر می‌گیریم و از این نقطه به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم.

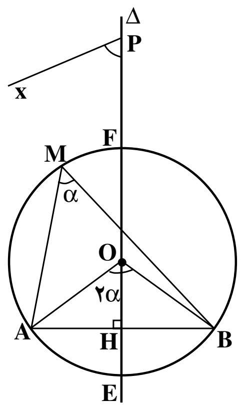
درنتیجه :

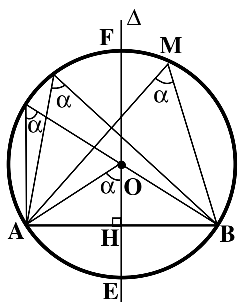
$$A\hat{M}B = \frac{۱}{۲}\widehat{AEB} = \frac{۱}{۲} \times ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$$

هر نقطهٔ دیگری از این کمان نیز این ویژگی را دارد، یعنی اگر $M_۱$ ، $M_۲$ ، ... و M_n ، نقطه‌های دیگری روی کمان $\widehat{AFB}$ باشند و از این نقطه‌ها به دو نقطهٔ A و B وصل کنیم، زاویه‌های $AM_۱B$ ، $AM_۲B$ ، $AM_۳B$ ، ... و AM_nB همگی ۶۰° هستند. به عبارت دیگر، هر نقطه از کمان $\widehat{AFB}$ رأس زاویه‌ای برابر ۶۰° است که ضلعهایش از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند.

این کمان، **کمان درخور**، یا **کمان حاوی** زاویهٔ ۶۰ درجه روبه‌رو به پاره‌خط AB نامیده می‌شود.

قضیه: مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلعهایش از دو نقطه ثابت می‌گذرند، کمانهایی از دو دایرهٔ مساوی است که از آن دو نقطهٔ ثابت می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آنها برابر ۲α است.

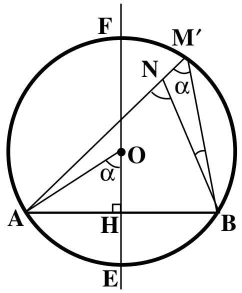




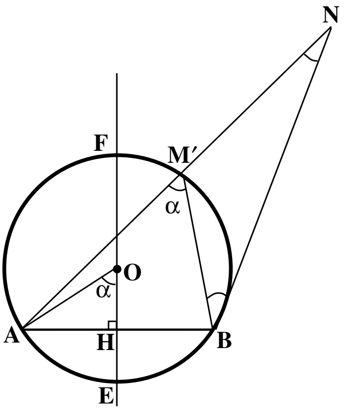
برهان: دو نقطهٔ ثابت A و B را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. آنها را به هم وصل کرده، وسط پاره‌خط AB را H می‌نامیم. آنگاه خط Δ ، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه P واقع بر خط Δ ، نیمخط Px را چنان رسم می‌کنیم که $H\hat{P}x = \alpha$ باشد. از نقطهٔ A خطی موازی Px رسم می‌نماییم تا خط Δ را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم می‌کنیم. این دایره از نقطه B نیز می‌گذرد و اندازهٔ کمان $\widehat{AEB} = ۲\alpha$ است. چرا؟ کمان $\widehat{AFB}$ مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α است که ضلعهایش از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، زیرا :

۱ــ هر نقطه مانند M که روی این کمان باشد و از این نقطه به دو نقطهٔ A و B وصل کنیم، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{M}B$ برابر α است چون :

$$A\hat{M}B = \frac{\widehat{AEB}}{۲} = \frac{۲\alpha}{۲} = \alpha$$



۲ــ نقطهٔ N، رأس هر زاویه مانند $\widehat{ANB}=\alpha$ که ضلعهایش از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد و در طرف کمان $\overset{\frown}{AFB}$ واقع است، روی کمان $\overset{\frown}{AFB}$ قرار دارد. زیرا اگر نقطهٔ N روی این کمان نباشد، یا داخل دایرهٔ C(O,R) واقع است، که در این صورت $\widehat{ANB}>\alpha$ خواهد بود، یا نقطهٔ N خارج این دایره قرار دارد که در این صورت $\widehat{ANB}<\alpha$ است. زیرا اگر در حالت نخست نقطهٔ برخورد امتداد AN با دایره را M′ بنامیم و از M′ به B وصل کنیم، داریم:



$$\widehat{ANB}=\widehat{AM'B}+\widehat{M'BN}$$

امّا $\widehat{AM'B}=\alpha$ ، پس؛ $\widehat{ANB}=\alpha+\widehat{M'BN}$

درنتیجه: $\widehat{ANB}>\alpha$

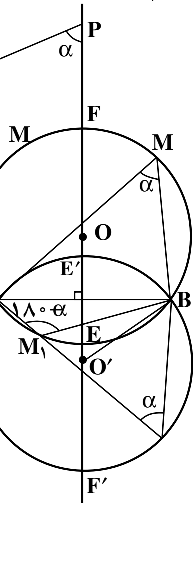
و در حالت دوم، اگر نقطهٔ برخورد AN با دایره را M′ بنامیم، داریم:

$$\widehat{ANB}=\widehat{AM'B}-\widehat{M'BN}$$

و از آنجا؛ $\widehat{ANB}=\alpha-\widehat{M'BN}$

درنتیجه: $\widehat{ANB}<\alpha$

بنابراین، در هر دوحالت، نتیجه به دست آمده خلاف فرض است. درنتیجه نقطهٔ N روی کمان $\overset{\frown}{AFB}$ است. این کمان، کمان درخور یا کمان حاوی زاویهٔ α روبه‌رو یا وابسته به پاره‌خط AB، نامیده می‌شود.



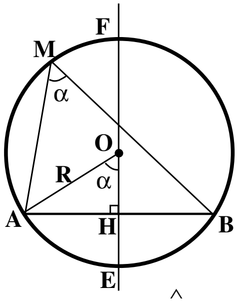
درصورتی که از نقطهٔ B خطی موازی Px رسم کنیم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطهٔ O′ قطع کند، و سپس دایره‌ای به مرکز O′ و به شعاع $O'A=O'B$ رسم نماییم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطه‌های E′ و F′ قطع کند (شکل روبه‌رو)، کمان $\overset{\frown}{AF'B}$ نیز کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB است.

بنابراین، مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلعهایش از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرند کمانهایی از دو دایرهٔ مساوی است که بر A و B مرور می‌کنند و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آنها، برابر ۲α است.

نتیجه ۱ــ کمانهای $\overset{\frown}{AEB}$ و $\overset{\frown}{AE'B}$ از دو دایرهٔ O و O'، کمان درخور زاویهٔ α-۱۸۰ روبه‌رو به پاره‌خط AB می‌باشند. چرا؟

نتیجه ۲ ــ کمان درخور زاویهٔ ۹۰ درجه روبه‌رو به پاره‌خط AB، دایره‌ای به قطر AB است. چرا؟

نکته: درهریک از حالتهای ذکرشده، دو نقطهٔ A و B جزء کمان درخور زاویهٔ α یا α-۱۸۰ نیستند.



نتیجه ۳ــ شعاع دایره‌ای که کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB به‌طول a بخشی از آن است، $R = \frac{a}{۲\sin\alpha}$ و فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB، $OH = \frac{a}{۲|tg\alpha|}$ است، زیرا :

$$\hat{H} = ۹۰^\circ \text{ ، } A\hat{O}H = \alpha \text{ ، } AH = \frac{AB}{۲} \text{ ، } \sin\alpha = \frac{AH}{AO}$$

بنابراین داریم :

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{۲}}{R} = \frac{a}{۲R}$$

درنتیجه

$$R = \frac{a}{۲\sin\alpha}$$

از طرفی

$$|\cos\alpha| = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{R}$$

پس

$$OH = R|\cos\alpha|$$

همچنین داریم

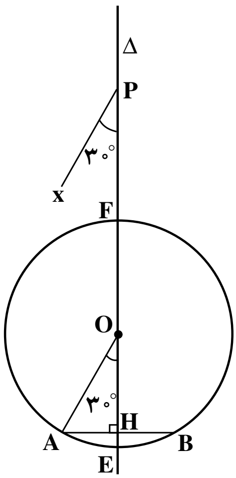
$$|tg\alpha| = \frac{AH}{OH} = \frac{\frac{a}{۲}}{OH}$$

پس

$$OH = \frac{a}{۲|tg\alpha|}$$

درنتیجه :

$$OH = R|\cos\alpha| = \frac{a}{۲|tg\alpha|}$$



مثال ۱: پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر داده شده است. کمان درخور زاویه °۳۰ روبه‌رو به این پاره‌خط را رسم کنید. شعاع دایره‌ای را که این کمان درخور بخشی از آن است و فاصلهٔ مرکز این دایره از پاره‌خط AB را تعیین کنید.

حل: خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ اختیاری P واقع بر Δ نیمخط Px را چنان رسم می‌نماییم که $H\hat{P}x = ۳۰^\circ$ باشد (H وسط پاره‌خط AB است). از نقطهٔ A خطی موازی Px رسم می‌کنیم تا خط Δ را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم می‌کنیم. کمان $\widehat{AFB}$ از این دایره قسمتی (نیمی) از مکان هندسی خواسته شده است. با انتخاب نقطهٔ P در طرف دیگر پاره‌خط و تکرار همین فرآیند نیمهٔ دیگر مکان هندسی به‌دست می‌آید.

شعاع دایرهٔ (OA و O) را R می‌نامیم. می‌دانیم که :

$$R = \frac{a}{۲\sin\alpha}$$

پس

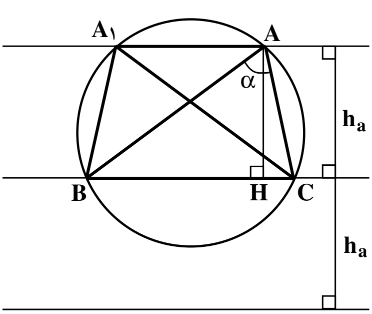
$$R = \frac{۴}{۲\sin ۳۰^\circ} = ۴$$

از طرفی داریم :

$$OH = R|\cos\alpha|$$

بنابراین :

$$OH = ۴|\cos ۳۰^\circ| = ۲\sqrt{۳}$$



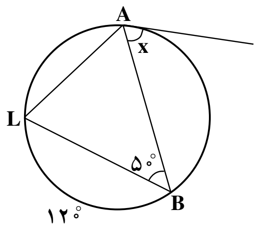
مثال ۲: از مثلث ABC، ضلع $BC = a$ ، زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و ارتفاع $AH = h_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

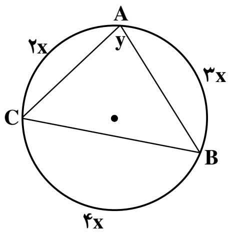
حل: برای رسم مثلث ABC، نخست پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. حال باید رأس A را مشخص

کنیم. چون $B\hat{A}C=\alpha$ ، پس یک مکان هندسی رأس A کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط BC است ؛ از طرفی $AH = h_a$ مقدار ثابتی است، پس مکان هندسی دیگر رأس A دو خط موازی ضلع BC و به فاصلهٔ h_a از آن است. این دو مکان هندسی را رسم می‌کنیم، نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است. مسأله چند جواب دارد؟

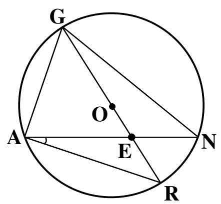
مسأله‌ها

۱. اندازهٔ x و y را در هر یک از شکلهای زیر تعیین کنید.





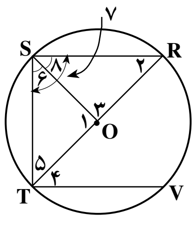
۲. در دایرهٔ به مرکز O، GR قطر دایره است. $\overset{\frown}{AG} = ۷۰^\circ$ و $N\hat{A}R = ۳۰^\circ$. اندازه‌های زیر را به‌دست آورید و در جای مناسب روی شکل یادداشت کنید :



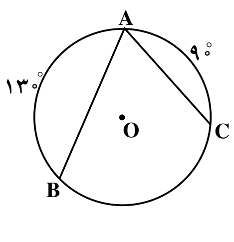
الف) $\hat{N}$ ب) $\hat{R}$

پ) $\overset{\frown}{NR}$ ت) $\overset{\frown}{GN}$

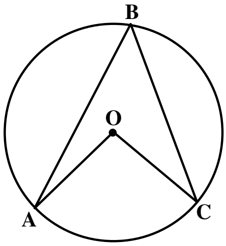
ث) $G\hat{A}N$ ج) $G\hat{A}R$



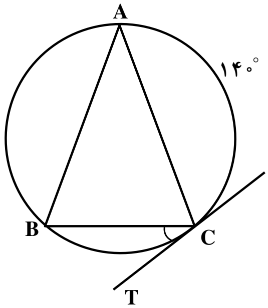
۳. در دایرهٔ به مرکز O، RS||VT ، $\overset{\frown}{TS} = ۷۰^\circ$ و RT قطر دایره است. اندازهٔ زاویه‌های ۱ تا ۸ را به‌دست آورید.



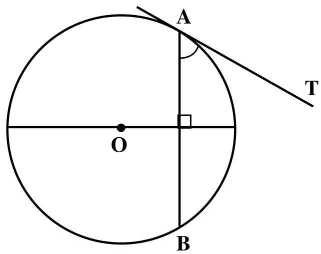
۴. زاویهٔ محاطی BAC در دایرهٔ به مرکز O داده شده است. اگر $\overset{\frown}{AB} = ۱۳۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AC} = ۹۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BAC را تعیین کنید.



۵. در دایـــرهٔ بـــه مـــرکـــز O، اگـــر $A\hat{O}C=(3\alpha+12)^\circ$ و $A\hat{B}C=(\alpha+16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویه‌های مرکزی AOC و محاطی ABC را تعیین کنید.

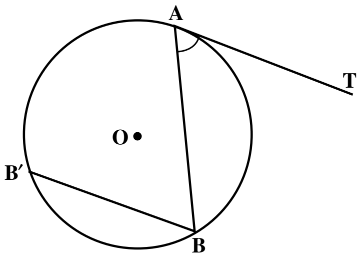


۶. در شکل روبه‌رو، AB = AC ، CT مماس بر دایره در نقطهٔ C و $\widehat{AC}=140^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ BCT را بیابید.



۷. زاویهٔ ظلی TAB در دایرهٔ به مرکز O داده شده است. با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر، ثابت کنید که

$$T\hat{A}B=\frac{\widehat{AB}}{2}$$



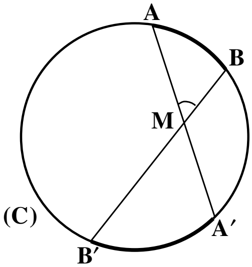
۸. زاویهٔ ظلی TAB در دایرهٔ به مرکز O داده شده است. به کمک خط ′BB که موازی خط مماس AT رسم شده است، ثابت کنید که

$$T\hat{A}B=\frac{\widehat{AB}}{2}$$

۹. با استفاده از تعریف زاویهٔ محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

۱۰. در مثلث ABC ضلع $BC=a$ ، $\hat{A}=\alpha$ و میانهٔ $AM=m_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

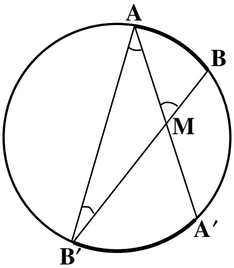
۲ــ۵ــ زاویهٔ بین دو وتر



دو وتر AA' و BB' از دایرهٔ (C) در نقطه M یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت می‌شود :

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

برهان: پاره‌خط AB' را رسم می‌کنیم. زاویهٔ $A\hat{M}B$ زاویهٔ خارجی مثلث AMB' است، پس :



$$A\hat{M}B = A\hat{B'}M + B'\hat{A}M$$

یا

$$A\hat{M}B = A\hat{B'}B + A'\hat{A}B'$$

چون $A\hat{B'}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ و $A'\hat{A}B' = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$ بنابراین :

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

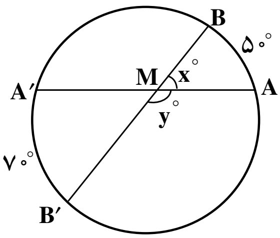
درنتیجه

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

به‌طورکلی می‌توان گفت :

قضیه: اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود برابر نصف مجموع اندازهٔ دو کمانی از دایره است که به ضلعها و امتداد ضلعهای آن زاویه محدودند.

مثال: به کمک شکل مقابل مقدارهای x و y را تعیین کنید.



حل: زاویهٔ $A\hat{M}B = x^\circ$ از برخورد دو وتر AA' و BB' به‌دست آمده است. پس داریم :

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

از آنجا

$$x^\circ = \frac{۵۰^\circ + ۷۰^\circ}{۲}$$

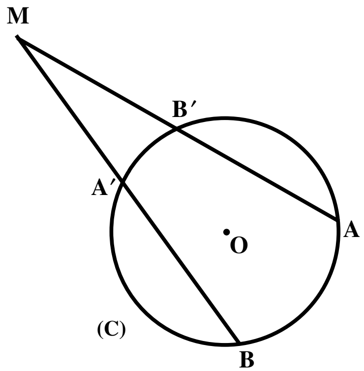
پس $x = ۶۰$

زاویهٔ $A\hat{M}B' = y^\circ$ مکمل زاویه AMB است. پس :

$y^\circ = ۱۸۰^\circ - x^\circ$

از آنجا $y^\circ = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ$

پس : $y = ۱۲۰$



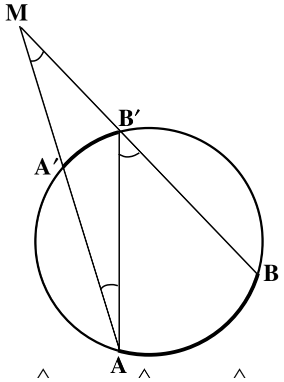
۲ــ۶ــ زاویهٔ بین امتداد دو وتر

امتداد وترهای AA' و BB' از دایرهٔ (C) در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت می‌شود :

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

برهان: پاره خط AB' را رسم می‌کنیم. زاویهٔ $AB'B$ ، زاویهٔ خارجی مثلث AMB' است،

پس : $A\hat{B'}B = B'\hat{A}M + A\hat{M}B'$



و یا $A\hat{M}B' = A\hat{B'}B - B'\hat{A}M$

امّا : $A\hat{B'}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ و $B'\hat{A}M = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$. چرا؟

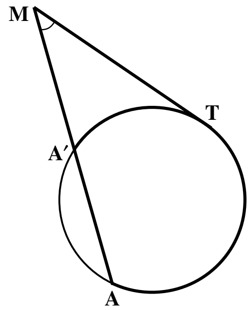
بنابراین $A\hat{M}B' = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$

درنتیجه :

$$A\hat{M}B = A\hat{M}B' = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

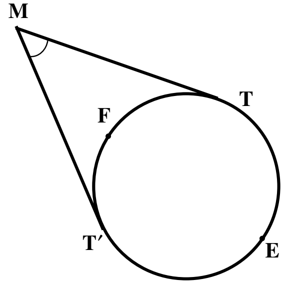
به‌طورکلی می‌توان گفت :

قضیـه: اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازهٔ کمانهایی از آن دایره است که به ضلعهای آن زاویه محدودند.



تمرین ۱ــ خط مماس بر دایرهٔ (C) در نقطهٔ T امتداد وتر ′AA از این دایره را در نقطهٔ M قطع کرده است (شکل روبه‌رو). ثابت کنید :

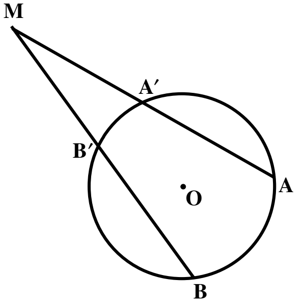
$$A\hat{M}T = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{A'T}}{۲}$$



تمرین ۲ ــ ثابت کنید زاویهٔ بین دو خط مماس رسم شده از دو نقطه T و ′T بر یک دایره، برابر قدرمطلق نصف تفاضل دو کمان ایجاد شده بین نقطه‌های T و ′T است.

راهنمایی: در شکل داده شده ثابت کنید

$$T\hat{M}T' = \left| \frac{\overset{\frown}{TET'} - \overset{\frown}{TFT'}}{۲} \right|$$



مثال ۱: امتدادهای دو وتر ′AA و ′BB از دایرهٔ O در نقطهٔ M متقاطعند. اندازهٔ زاویهٔ AMB را در هریک از حالتهای زیر تعیین کنید :

الف ــ اگر $\overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$ و $\overset{\frown}{A'B'} = ۸۰^\circ$ باشد ؛

ب ــ اگر $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'} = ۳۰^\circ$ باشد.

پ ــ اگر $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} + ۶۰^\circ$ باشد ؛

ت ـ اگر $\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۱}=\dfrac{\overset{\frown}{B'B}}{۴}=\dfrac{\overset{\frown}{BA}}{۳}=\dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{۲}$

حل: داریم :

الف ـ $A\hat{M}B=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=\dfrac{۱۲۰^\circ-۸۰^\circ}{۲}=۲۰^\circ$

ب ـ $A\hat{M}B=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=\dfrac{۳۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$

پ ـ $A\hat{M}B=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}+۶۰^\circ-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=۳۰^\circ$

ت ـ داریم : $\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۱}=\dfrac{\overset{\frown}{B'B}}{۴}=\dfrac{\overset{\frown}{BA}}{۳}=\dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{۲}$

امّا : $\overset{\frown}{A'B'}+\overset{\frown}{B'B}+\overset{\frown}{BA}+\overset{\frown}{AA'}=۳۶۰^\circ$. چرا؟

پس می‌توان نوشت :

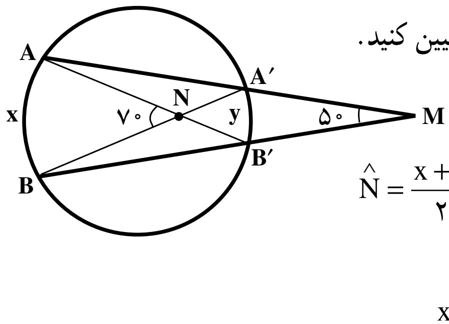
$$\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۱}=\dfrac{\overset{\frown}{B'B}}{۴}=\dfrac{\overset{\frown}{BA}}{۳}=\dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{۲}=\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}+\overset{\frown}{B'B}+\overset{\frown}{BA}+\overset{\frown}{AA'}}{۱+۴+۳+۲}=\dfrac{۳۶۰}{۱۰}=۳۶^\circ$$

پس $\overset{\frown}{A'B'}=۳۶^\circ$ و $\overset{\frown}{AB}=۱۰۸^\circ$

درنتیجه :

$$A\hat{M}B=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}=\dfrac{۱۰۸^\circ-۳۶^\circ}{۲}=۳۶^\circ$$

مثال ۲: با استفاده از شکل روبه‌رو، x و y را تعیین کنید.



حل: داریم :

$$\hat{N}=\dfrac{x+y}{۲}\Rightarrow ۷۰=\dfrac{x+y}{۲}$$

از آنجا :

(۱) $$x+y=۱۴۰$$

از طرفی

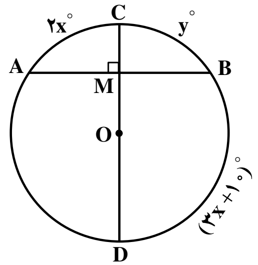
$$\hat{M}=\dfrac{x-y}{۲}\Rightarrow ۵۰=\dfrac{x-y}{۲}$$

پس

(۲) $$x-y=۱۰۰$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) مقدارهای x و y به‌دست می‌آیند.

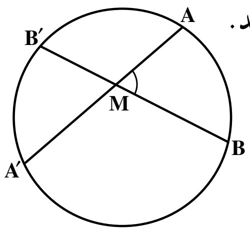
$$\begin{cases} x+y=۱۴۰ \\ x-y=۱۰۰ \end{cases} \Rightarrow x=۱۲۰^\circ \text{ و } y=۲۰^\circ$$



مسأله‌ها

۱. قطر CD در نقطهٔ M بر وتر AB از دایرهٔ به مرکز O عمود است. اگر $\widehat{AC}=۲x^\circ$ ، $\widehat{BC}=y^\circ$ و $\widehat{BD}=(۳x+۱۰)^\circ$ باشد، x و y را بیابید.

۲. دو وتر AA' و BB' از یک دایره، در نقطهٔ M متقاطعند:



الف) اندازهٔ زاویهٔ AMB را در هریک از حالتهای زیر تعیین کنید.

ـ $\widehat{AB}=۹۰^\circ$ و $\widehat{A'B'}=۶۰^\circ$

ـ $\widehat{AB}$ و $\widehat{A'B'}$ هر کدام ۷۵° باشند

ـ $\widehat{AB}+\widehat{A'B'}=۲۵۰^\circ$

ـ $\widehat{AB'}+\widehat{A'B}=۱۷۰^\circ$

ب) اگر:

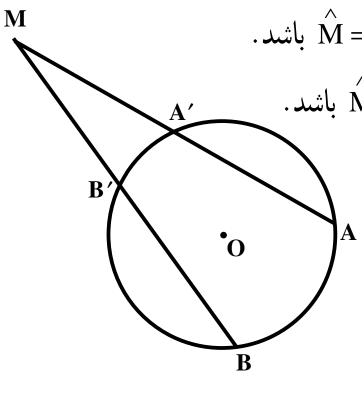
ـ $A\hat{M}B=۸۵^\circ$ باشد، $\widehat{AB}+\widehat{A'B'}$ را تعیین کنید.

ـ $A\hat{M}B=۴۸^\circ$ باشد، $\widehat{AB'}+\widehat{A'B}$ را بیابید.

ـ $A\hat{M}B=۶۰^\circ$ و $\widehat{AB'}=۱۶۰^\circ$ باشد، $\widehat{A'B}$ را تعیین کنید.

ـ $A\hat{M}B'=۷۰^\circ$ و $\widehat{A'B}=\widehat{AB'}$ باشد، $\widehat{AB'}$ را بیابید.

۳. امتدادهای دو وتر AA' و BB' از دایرهٔ O در نقطهٔ M متقاطعند، تعیین کنید:



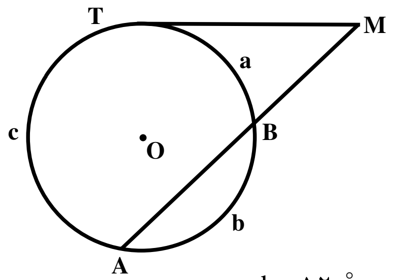
الف) اندازهٔ کمان $\widehat{A'B'}$ را، اگر $\widehat{AB}=۱۶۰^\circ$ و $\hat{M}=۲۰^\circ$ باشد.

ب) اندازهٔ کمان $\widehat{AB}$ را، اگر $\widehat{A'B'}=۶۰^\circ$ و $\hat{M}=۳۵^\circ$ باشد.

پ) اندازهٔ $\widehat{AB}-\widehat{A'B'}$ را، اگر $\hat{M}=۴۵^\circ$ باشد.

ت) اندازهٔ کمان $\widehat{A'B'}$ را، اگر $\widehat{AB}=۳\widehat{A'B'}$ و $\hat{M}=۲۵^\circ$ باشد.

۴. خط مماس بر دایره در نقطهٔ T و امتداد وتر AB در نقطهٔ M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$ ، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:



الف) اندازهٔ زاویهٔ M را در هریک از حالتهای زیر تعیین کنید :

ـ $a = ۶۰^\circ$ و $c = ۱۵۰^\circ$ ـ $c = ۲۰۰^\circ$ و $b = ۱۲۰^\circ$

ـ $c - a = ۷۴^\circ$ ـ $\frac{a}{۱} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۷}$

ب) تعیین کنید :

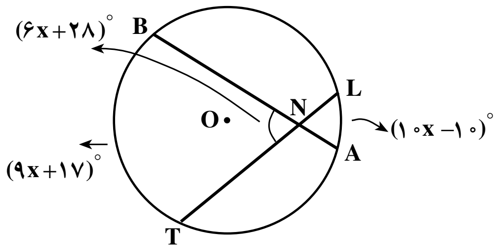
ـ a را در صورتی که $c = ۲۰۰^\circ$ و $\hat{M} = ۴۵^\circ$ باشد.

ـ c را در صورتی که $a = ۵۵^\circ$ و $\hat{M} = ۳۰^\circ$ باشد.

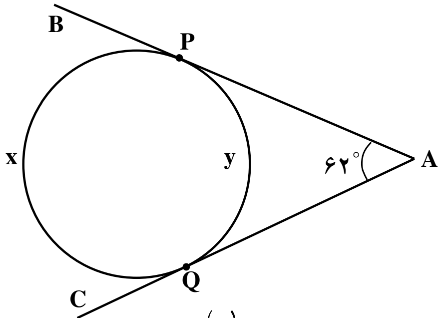
ـ a را در صورتی که $c = ۳a$ و $\hat{M} = ۴۵^\circ$ باشد.

ـ a را در صورتی که $b = ۱۰۰^\circ$ و $\hat{M} = ۶۰^\circ$ باشد.

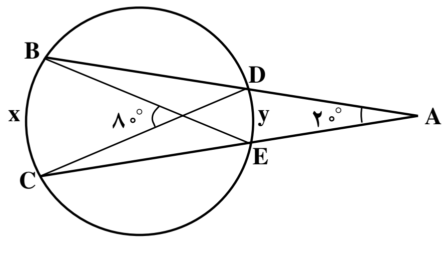
۵. در شکل زیر x و اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{N}T$ را تعیین کنید.



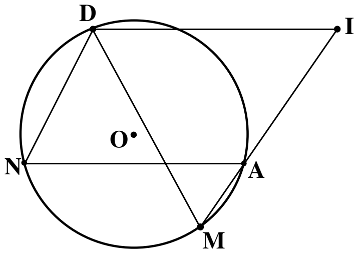
۶. در هرکدام از شکلهای زیر x و y را بیابید.



(ب)

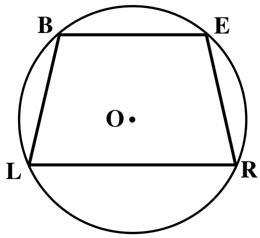


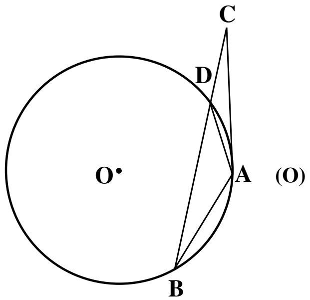
(الف)



۷. در شکل روبه‌رو چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های I، A و M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید $DM = DI$.

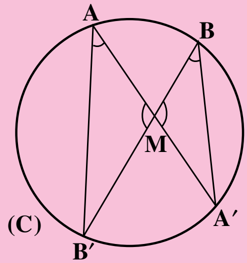
۸. در دایرهٔ (O)، $BL = ER$. نشان دهید $BE \| LR$.





۹. در دایرهٔ (O) مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطهٔ D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC، متساوی‌الساقین است.

۲ــ۷ــ رابطهٔ طولی در دایره



قضیه: از نقطهٔ M واقع در داخل دایرهٔ (C) دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند. ثابت کنید :

$MA.MA' = MB.MB'$

برهان: از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث MAB' و MBA' متشابه‌اند زیرا :

$$A\hat{M}B' = B\hat{M}A' \quad \text{و} \quad B'\hat{A}A' = A'\hat{B}B' = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

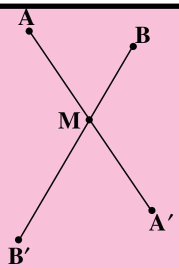
پس داریم

$$\frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'}$$

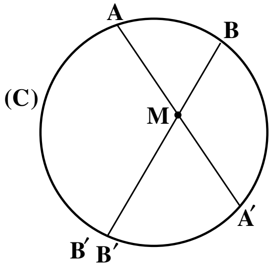
درنتیجه :

$$MA.MA'=MB.MB'$$

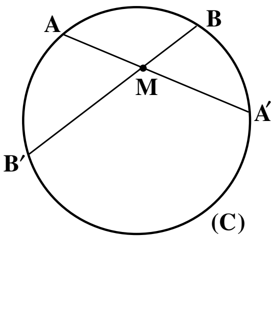
عکس قضیه: اگر دو پاره‌خط AA' و BB' در نقطهٔ M یکدیگر را طوری قطع کنند که $MA.MA'=MB.MB'$ ، آن‌گاه چهار نقطهٔ A، A' ، B و B' روی یک دایره‌اند.



برهان: بر سه نقطهٔ A، B و A' یک دایره می‌گذرانیم. (دایرهٔ C) اگر این دایره از نقطهٔ B' بگذرد، حکم ثابت است ؛ امّا اگر این دایره از B' نگذرد، خط MB را در نقطهٔ دیگری مانند B'' قطع خواهد کرد. در این صورت خواهیم داشت : $MA.MA'=MB.MB''$. از مقایسهٔ این رابطه با فرض قضیه، نتیجه می‌شود $MB'=MB''$ ، و این نشان می‌دهد که B'' بر B' منطبق است یعنی دایره‌ای که بر سه نقطه A، B و A' گذشته است، از نقطهٔ B' نیز می‌گذرد، پس چهار نقطهٔ A، A' ، B و B' روی یک دایره واقعند.



مثال: دو وتر AA' و BB' از دایرهٔ (C) در نقطهٔ M متقاطعند. اگر $MA=۴$ ، $MB=۳$ و $MA'=۶$ باشد اندازهٔ وتر BB' را به‌دست آورید.

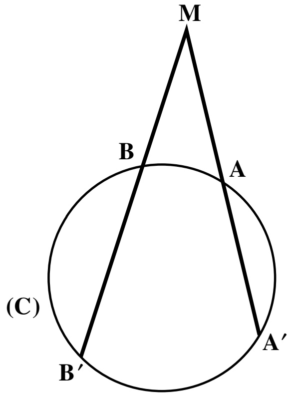


حل: چون $BB'=MB+MB'$ ، پس برای تعیین اندازهٔ پاره‌خط BB' باید اندازهٔ پاره‌خط MB' را به‌دست آوریم، داریم :

$$MA.MA'=MB.MB'\Rightarrow ۴\times ۶=۳\times MB'\Rightarrow MB'=۸$$

پس

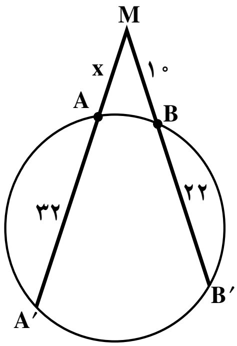
$$BB'=MB+MB'=۳+۸=۱۱$$



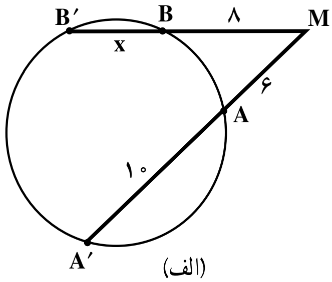
تمرین ــ ثابت کنید اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایرهٔ (C) یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند، آنگاه :

$$MA.MA' = MB.MB'$$

مثال: مقدار x را در هریک از شکلهای زیر به‌دست آورید.



(ب)



(الف)

حل: با توجه به داده‌های مسأله داریم :

الف ــ $MA' = MA + AA' = ۶ + ۱۰ = ۱۶$ ، $MB' = MB + BB' = ۸ + x$

$MA.MA' = MB.MB' \Rightarrow ۶ \times ۱۶ = ۸(۸ + x) \Rightarrow x = ۴$

ب ــ $MB' = MB + BB' = ۱۰ + ۲۲ = ۳۲$ ، $MA' = MA + AA' = x + ۳۲$

$MA.MA' = MB.MB'$

$x(x + ۳۲) = ۱۰ \times ۳۲$

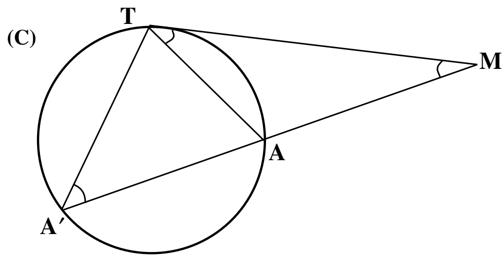
$x^۲ + ۳۲x - ۳۲۰ = ۰$

$(x + ۴۰)(x - ۸) = ۰$

$\boxed{x = ۸}$ یا $x = -۴۰$

طبیعی است که جواب $x = -۴۰$ قابل قبول نیست.

قضیه: اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه تماس، واسطه هندسی بین دو قطعهٔ قاطع است.



برهان: دایرهٔ (C) و نقطهٔ M را در خارج آن در نظر می‌گیریم. مماس MT و قاطع MAA′ را نسبت به این دایره رسم می‌کنیم؛ می‌خواهیم ثابت کنیم $MT^{۲} = MA.MA'$. از T به A و A′ وصل می‌کنیم. دو مثلثِ MAT و MA′T متشابه‌اند. زیرا:

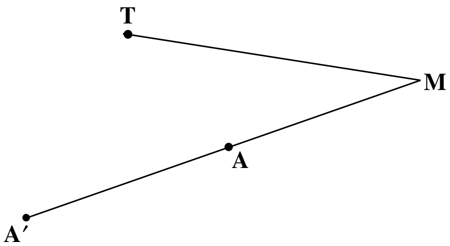
$$A\hat{T}M = A\hat{A'}T = \frac{AT}{۲} \;,\; \hat{M} = \hat{M}$$

پس

$$\frac{MT}{MA} = \frac{MA'}{MT}$$

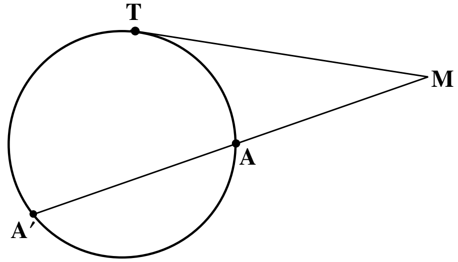
و درنتیجه:

$$MT^{۲} = MA.MA'$$



تمرین ــ(عکس قضیهٔ بالا). سه نقطهٔ M، A و A′ روی یک خط راست و نقطهٔ T خارج این خط به قسمی واقعند که $MT^{۲} = MA.MA'$ است. ثابت کنید دایره‌ای که بر سه نقطهٔ A، A′ و T می‌گذرد در نقطهٔ T بر خط MT مماس است.

مثال: در شکل مقابل، خط MT مماس بر دایره در نقطهٔ T، و MA قاطع دایره است:



الف ــ اگر $MA = ۴$ و $AA' = ۵$ باشد، اندازهٔ MT را تعیین کنید.

ب ــ اگر $MA' = ۱۸$ و $MT = ۱۲$ باشد، اندازهٔ AA′ را به‌دست آورید.

حل: با توجه به این که $MT^{۲} = MA.MB$،

داریم :

الف ــ $MT^{۲} = ۴\times۹ = ۳۶$

$MT = ۶$

ب ــ $MT^{۲} = MA.MA'$

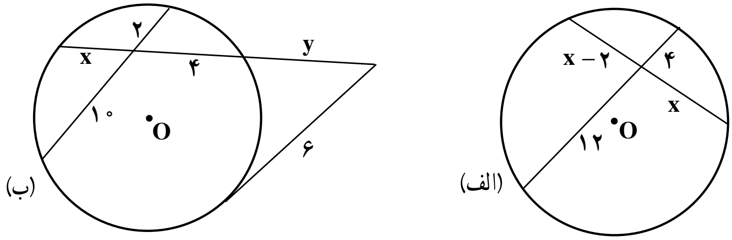
$۱۲^{۲} = MA\times۱۸$

$MA = ۸$

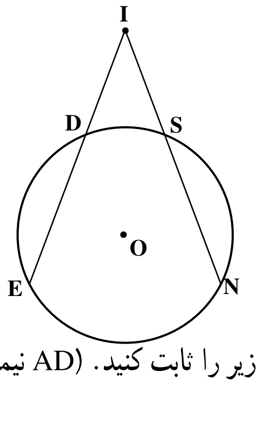
$AA' = MA' - MA = ۱۸ - ۸ = ۱۰$

مسأله‌ها

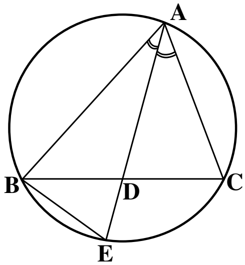
۱. در هریک از شکلهای زیر x و y را محاسبه کنید.



۲. در شکل زیر دو قاطع IE و IN با هم برابرند، ثابت کنید : $IS = ID$



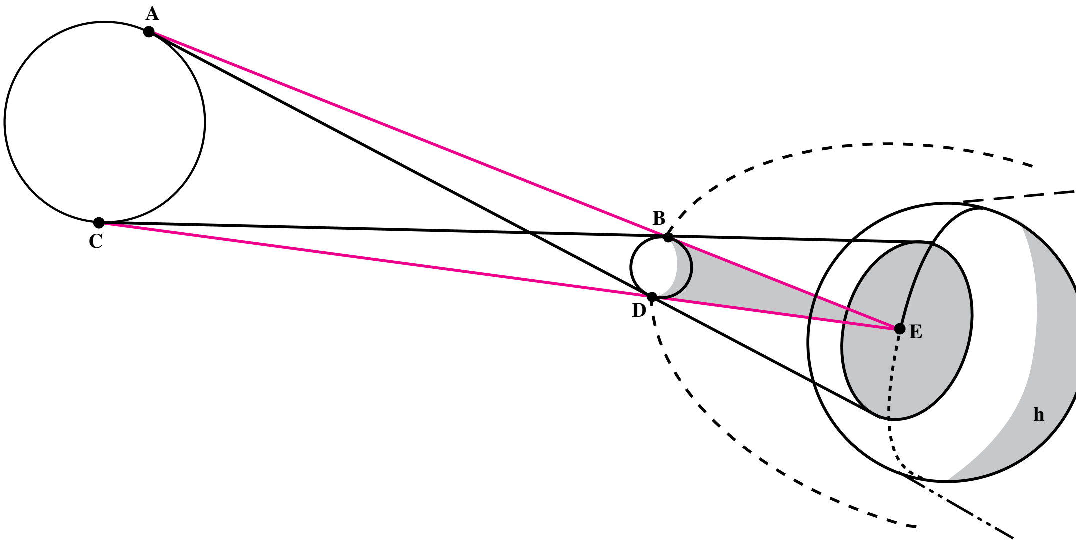
۳. با توجه به شکل احکام زیر را ثابت کنید. (AD نیمساز زاویهٔ BAC است)



الف) مثلث ADC با مثلث ABE متشابه است.

ب) $AB.AC = AD.AE$

پ) $AD^{۲} = AB.AC - BD.DC$



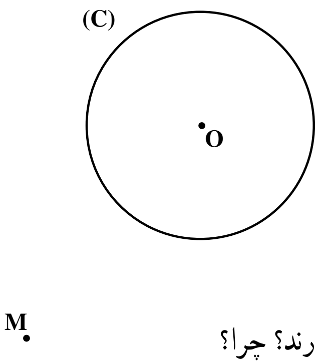
۲ــ۸ــ ترسیمهای هندسی

کسوف کامل یک منظره متحیّرکننده است. روشنایی آسمان فوراً به تاریکی تبدیل می‌شود. پرنده‌ها حیران می‌شوند. سیاهی غیرمنتظره تنها برای مدتی (حداکثر هفت دقیقه) بر زمین چیره می‌شود و سپس نور و روشنایی با سرعتی که محو شده بود باز می‌گردد.

چنین حالتی وقتی رُخ می‌دهد که ماه طوری بین زمین و خورشید قرار می‌گیرد که سایه‌اش بر روی زمین می‌افتد. این سایه به شکل یک مخروط است و به دلیل اندازه‌های نسبی ماه و خورشید و زمین و فاصله‌های آنها از یکدیگر، تمام یا قسمتی از زمین در این مخروط سایه قرار می‌گیرد.

فعالیت ۲ــ۵

دایرهٔ C(O,R) و نقطهٔ M واقع در خارج این دایره داده شده‌اند:



۱ــ از M به مرکز دایره وصل کنید.

۲ــ به قطر پاره‌خط OM یک دایره رسم کنید.

۳ــ نقطه‌های برخورد دایرهٔ به قطر OM با دایرهٔ (C) را T و T′ بنامید. از نقطه‌های O و M به نقطه‌های T و T′ وصل کنید.

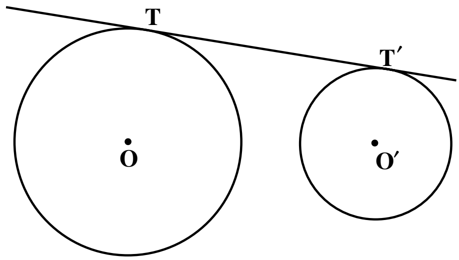
۴ــ زاویه‌های OTM و OT′M چند درجه‌اند؟ چرا؟

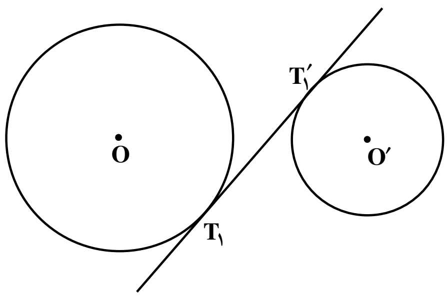
۵ ــ دو خط MT و MT′ نسبت به دایرهٔ (C) چه وضعی دارند؟ چرا؟

از هر نقطهٔ خارج یک دایره فقط دو خط مماس بر آن دایره می‌توان رسم نمود.

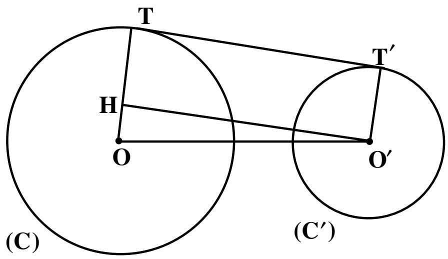
مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک دو دایره خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد. اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط، **مماس مشترک خارجی**، و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، این خط **مماس مشترک داخلی** دو دایره نامیده می‌شود.





رسم مماس مشترک خارجی دو دایره



دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم خط TT' یک مماس مشترک خارجی این دو دایره باشد. پاره‌خط OO' خط‌المرکزین دو دایره را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ O' خطی موازی TT' رسم می‌نماییم تا OT را در نقطهٔ H قطع کند.

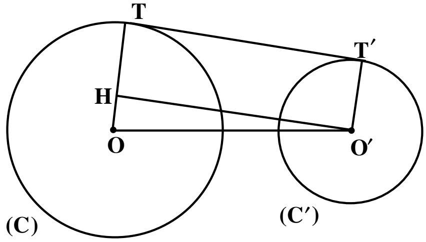
۱ــ ویژگیهای چهارضلعی $THO'T'$ را توضیح دهید.

۲ــ اندازهٔ پاره‌خط OH را برحسب R و R' به‌دست آورید.

۳ــ یک دایره به مرکز O و به شعاع OH رسم کنید. خط $O'H$ نسبت به این دایره چه وضعی دارد؟

۴ــ با توجه به کارهای انجام شده در بالا، روش رسم مماس مشترکهای خارجی دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را شرح دهید.

اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره ــ اندازهٔ پاره‌خط TT' طول مماس مشترک



خارجی دو دایره نامیده می‌شود. برای محاسبهٔ طول این پاره‌خط در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'H$ $(\hat{H}=۹۰^\circ)$ داریم :

$$OO'^{۲}=OH^{۲}+O'H^{۲}$$

با فرض $OO'=d$ و با توجه به این که $O'H=TT'$ و $OH=R-R'$، خواهیم داشت :

$$d^{۲}=(R-R')^{۲}+TT'^{۲}$$

از آنجا داریم

$$TT'^{۲}=d^{۲}-(R-R')^{۲}$$

درنتیجه : $$TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}$$

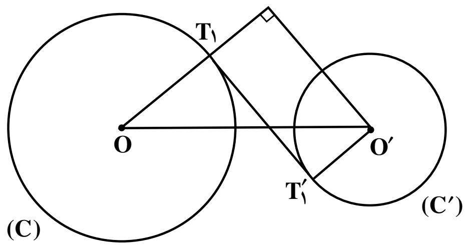
مثال: اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ $C(O,۷)$ و $C'(O',۱)$ را با فرض $OO'=۱۰$ تعیین کنید.

حل: داریم : $$R=۷ ، R'=۱ ، d=۱۰ ، TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}$$

پس $$TT'=\sqrt{۱۰^{۲}-(۷-۱)^{۲}}$$

درنتیجه : $$TT'=۸$$

تمرین ۱ــ دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ داده شده‌اند. مماس مشترکهای داخلی این دو دایره را رسم کنید و مراحل کار خود را توضیح دهید. در چه صورت دو دایره مماس مشترک داخلی دارند؟



تمرین ۲ــ اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را بر حسب R و R' و $OO'=d$ به‌دست آورید.

مسأله‌ها

۱. وضعیت دو دایره را در حالتهای مختلف در نظر بگیرید، سپس در هر حالت مماس مشترکهای آنها را در صورت وجود رسم کنید.

۲. دو دایره به شعاعهای ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازهٔ مماس مشترک خارجی آنها را به‌دست آورید.

۳. مقدار a را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاعهای ۸ و ۳ و خط‌المرکزین d = ۱۳ ، برابر ۳ − ۵a باشد.

۴. ثابت کنید مماس مشترکهای داخلی و خط‌المرکزین دو دایره همرسند.

۵ . در مورد همرسی مماس مشترکهای خارجی دو دایره و خط‌المرکزین آنها چه می‌توان گفت؟

مجله ریاضی

یکی از پدیده‌های جالب در ریاضیات **نوار موبیوس** است که در اواخر قرن هجدهم توسط فردیناند موبیوس معرفی شد.

برای ساختن آن یک نوار کاغذی به طول ۱۸ سانتی‌متر و عرض ۳ سانتی‌متر تهیه کنید. سپس نوار را نیم دور چرخانده، دو سر آزاد آن‌را به هم بچسبانید.

قلم خود را روی نقطه‌ای در وسط نوار قرار دهید و بدون بلند کردن آن خطی در امتداد نوار رسم کنید تا به نقطهٔ شروع برگردید.

به همین دلیل است که می‌گویند، نوار موبیوس فقط یک رو دارد. حال نوار را با دقت در امتداد آن خط بِبُرید (قیچی کنید). چه اتفاقی می‌افتد؟

با استفاده از یک نوار کاغذی به طول ۲۴ و عرض ۴/۵ سانتی‌متر نوار موبیـوس دیگری تهیه کنید. سپس در امتداد خطی به فاصلهٔ ۱/۵ سانتی‌متر از لبهٔ نوار آن‌را بِبُرید. آیا باز هم نتیجه‌ای مشابه تجربهٔ قبل به‌دست می‌آورید؟

قضاوت شما در مورد این پدیده چیست؟



فصل ۳

تبدیلها



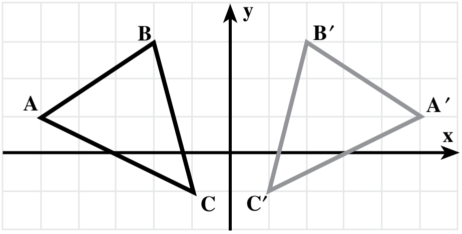
قالی طرح شمسه نمونهٔ زیبایی از تبدیلهای هندسی است.

۳ــ۱ــ نگاشت

در مطالعهٔ شکلهای هندسی همنهشت و متشابه دیدیم تناظرهای خاصی بین اجزای آنها برقرار است. حال می‌خواهیم وضعیتهای مختلفی را که یک شکل دراثر حرکت مجموعهٔ نقطه‌هایش در صفحه پیدا خواهد کرد مورد مطالعه قرار دهیم. این حرکتها از نظر ریاضی به عنوان تناظرهایی بین مجموعهٔ نقطه‌های آنها توصیف می‌شوند.

فعالیت ۳ــ۱

همنهشتی دو مثلث به عنوان تناظر بین مثلثهایی که ضلعهای متناظر و زاویه‌های متناظرشان



شکل ۱

مساوی هستند، مشخص شد. مثلثهای ABC و A′B′C′ را که در شکل (۱) آمده‌اند در نظر بگیرید.

۱. زاویه‌های دو مثلث را اندازه گرفته، اندازه‌های آنها را باهم مقایسه کنید.

۲. با توجه به مختصات نقطه‌ها طول AB، AC، BC، A′B′ ، A′C′ و B′C′ را به‌دست آورید. این طولها چه نسبتی با هم دارند؟

۳. آیا مثلثهای ABC و A′B′C′ همنهشت هستند؟

۴. نقطهٔ دلخواه (x,y) از مثلث ABC را در نظر بگیرید، نقطهٔ نظیر آن را روی مثلث A′B′C′ مشخص کنید.

در ریاضی برای تعریف انواع معینی از نظیرسازی‌های بین مجموعه‌ها، کلمهٔ نگاشت به‌کار می‌رود.

> یک نگاشت از D به R، یک عمل نظیر سازی است که به هر عضو مجموعهٔ D یک و تنها یک عضو از مجموعهٔ R را نظیر می‌کند.

توجّه: طبق این تعریف یک عضو R ممکن است به بیش از یک عضو D نظیر شود.

نگاشت‌ها را معمولاً با حروف بزرگ نشان می‌دهند. نماد $M:D \to R$ نگاشت M از مجموعه D به مجموعه R را نمایش می‌دهد. اگر P عضوی از مجموعه D و P′ عضو نظیر آن در مجموعهٔ R باشد، می‌نویسیم $M(P) = P'$ [1]. P′ تصویر P تحت نگاشت M خوانده می‌شود.

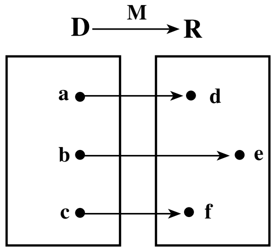
مثال ۱: در کدامیک از موردهای صفحه بعد، نظیرسازی M، نگاشتی از D به R است؟ تصویر c را تحت نظیرسازی هایی که نگاشت هستند پیدا کنید. در هریک از موردهای زیر، e تصویر چه عضوی از D است؟

حل: مورد (الف) یک نگاشت است، زیرا هر عضو مجموعهٔ D به یک و تنها یک عضو از مجموعه R نظیر می‌شود. تصویر c، f است یعنی $M(c) = f$ و e تصویر b است یا $M(b) = e$.

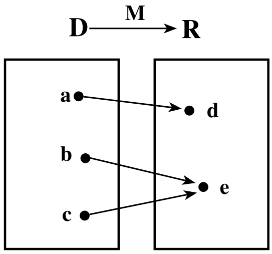
مورد (ب) نیز یک نگاشت است، به دلیل آن که هیچ عضوی در مجموعهٔ D وجود ندارد که به بیش از یک عضو از مجموعه R نظیرشده باشد. البته نگاشت (الف) با نگاشت (ب) متفاوت است. به آن فکر کنید! تصویر c، e است یعنی $M(c) = e$ و e تصویر دو عضو D، b و c است، یعنی

۱ــ Mapping

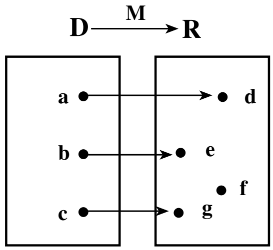
(الف)



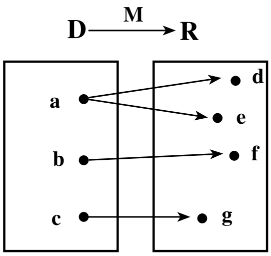
(ب)



(پ)



(ت)



$M(c)=e$ و $M(b)=e$.

مورد (پ) یک نگاشت است. یعنی هر عضو D دارای یک و فقط یک تصویر در R است. تصویر c، g است یا $M(c)=g$ و e تصویر b است یا $M(b)=e$.

موردهای (الف)، (ب) و (پ) را با هم مقایسه کرده، تفاوتها و مشابهت‌های آنها را بررسی کنید.

مورد (ت) یک نگاشت نیست، زیرا یکی از عضوهای D یعنی a به دو عضو مختلف R یعنی d و e نظیر شده است. بنابراین شرط نگاشت بودن را ندارد.

در مثال ۱، قسمتهای (الف) و (پ) نگاشت‌های **یک به یک** خوانده می‌شوند. در نگاشت یک به یک، هر عضو R حداکثر می‌تواند تصویر یک عضو D باشد. به این ترتیب نگاشت بند (ب) یک به یک نیست. توجه کنید که در بند (پ) اگرچه f تصویر هیچ‌یک از اعضای D تحت نگاشت M نیست، ولی با این وجود شرایط یک به یک بودن نگاشت همچنان برقرار است.

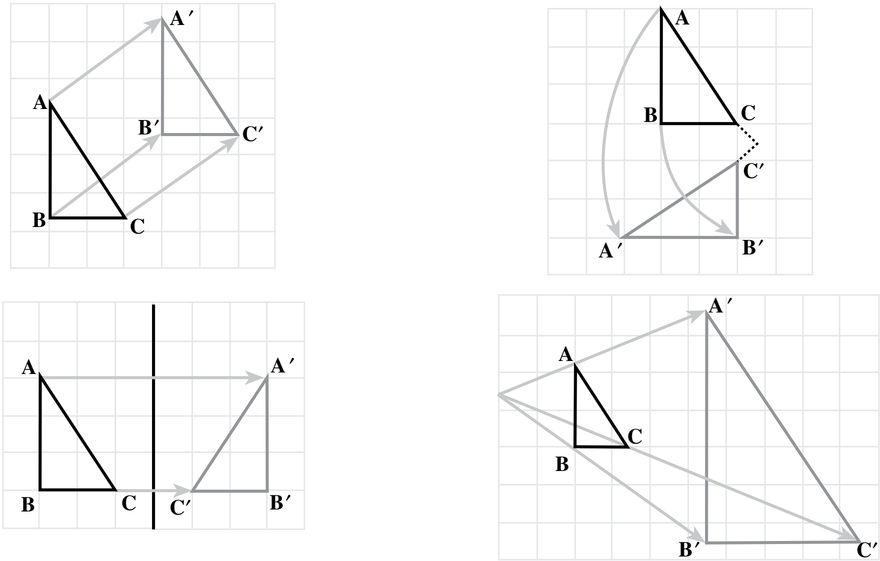
نگاشت‌های خاصی که آنها را تبدیل[۱] می‌خوانیم حرکتهایی را در هندسه تشریح می‌کنند.

> **تبدیل**، نگاشتی یک به یک از صفحه به روی خودش است. یعنی در تبدیل، هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نیستند و هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است.

توجّه: اگرچه تبدیلها به عنوان نگاشت‌هایی از کل صفحه به روی خودش تعریف می‌شوند ولی

۱ــ Transformation

در این کتاب، فقط اثر این‌گونه نگاشت‌ها را بر شکلهای هندسی مانند خط، مثلث یا شکلهای دیگر مورد بررسی قرار می‌دهیم. در شکل زیر تعدادی از تبدیلهای متداول نشان داده شده است.



شکل ۲

در هریک از نمودارها رابطه‌ای بین نقطه‌های متناظر در دو مثلث وجود دارد.

A نگاشته می‌شود به A′: $\quad A \to A'$

B نگاشته می‌شود به B′: $\quad B \to B'$

C نگاشته می‌شود به C′: $\quad C \to C'$

A′ ، B′ و C′ به ترتیب تبدیل یافتهٔ نقطه‌های A، B و C هستند.

هر نقطهٔ صفحه را به‌صورت زوج مرتب (x,y) نشان می‌دهیم. اگر T یک تبدیل باشد، آنگاه $T(x,y)=(x',y')$ به این معنا است که نقطهٔ (x',y') تصویر نقطهٔ (x,y) تحت تبدیل T است.

مثال ۲: اگر $T(x,y)=(x+۱,۳y)$ یک تبدیل باشد،آنگاه

الف) تصویر نقطه‌های $(۲,۵)$ ، $(۳,۰)$ و $(۳,-۲)$ را تحت این تبدیل به‌دست آورید.

ب) تحت تبدیل T، $(۴,۹)$ تصویر چه نقطه‌ای است؟

حل: الف) چون تبدیل T به طول هر نقطه یعنی x، یک واحد اضافه و عرض هر نقطه یعنی y را سه برابر می‌کند، پس

$$T(۲,۵)=(۲+۱\ ,\ ۳\times۵)=(۳,۱۵)$$

$$T(۰,۳)=(۰+۱\ ,\ ۳\times ۳)=(۱,۹)$$
$$T(۳,-۲)=(۳+۱\ ,\ ۳(-۲))=(۴,-۶)$$

ب) در اینجا، تصویر نقطه را داریم و می‌خواهیم خود نقطه را پیدا کنیم. اگر آن نقطه را با زوج مرتب (x,y) نشان دهیم، با توجه به تبدیل T خواهیم داشت :

$$T(x,y)=(۴,۹)$$

یعنی

$$(x+۱\ ,\ ۳y)=(۴,۹)$$

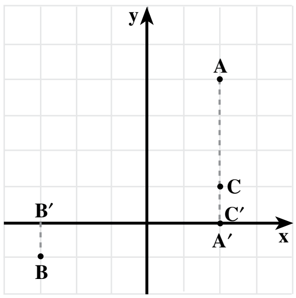
پس باید
$$x+۱=۴\ ,\ ۳y=۹$$

درنتیجه

$$x=۳\ ,\ y=۳$$

بنابراین (۴,۹) تصویر (۳,۳) است یا $T(۳,۳)=(۴,۹)$.

مثال ۳: نقطه‌های $A=(۲,۴)$ ، $B=(-۳,-۱)$ و $C=(۲,۱)$ را در صفحهٔ مختصات مشخص کنید و تصویر این نقطه‌ها را تحت نگاشت $M(x,y)=(x,۰)$ به‌دست آورید. اگر A' ، B' و C' تصویر این نقطه‌ها تحت نگاشت M باشند، آنها را نیز در صفحهٔ مختصات مشخص کنید.



شکل ۳

حل: چون نگاشت M طول هر نقطه را حفظ می‌کند و عرض آن را صفر می‌کند، بنابراین

$$M(A)=M(۲,۴)=(۲,۰)=A'$$
$$M(B)=M(-۳,-۱)=(-۳,۰)=B'$$
$$M(C)=M(۲,۱)=(۲,۰)=C'$$

از نظر هندسی نگاشت M هر نقطه را به‌طور عمودی روی محور xها تصویر می‌کند.

آیا این نگاشت یک تبدیل است؟

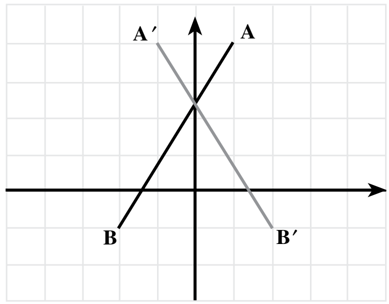
مثال ۴: نقطه‌های $A=(۱,۴)$ ، $B=(-۲,-۱)$ و سپس A' و B' که $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ را، با توجه به ضابطه‌های زیر در صفحهٔ مختصات مشخص کنید. پاره‌خطهای AB و

$A'B'$ را رسم کنید. طول AB و $A'B'$ را با استفاده از فرمول فاصله به‌دست آورید. AB و $A'B'$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

الف) $T(x,y)=(-x,y)$

ب) $T(x,y)=(۲x,y-۱)$

حل: الف)



شکل ۴

$$T(A)=T(۱,۴)=(-۱,۴)=A'$$

$$T(B)=T(-۲,-۱)=(۲,-۱)=B'$$

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

$$AB=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۴+۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۹+۲۵}$$

$$=\sqrt{۳۴}$$

$$A'B'=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(۴+۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۹+۲۵}$$

$$=\sqrt{۳۴}$$

درنتیجه $AB=A'B'$ ، یعنی طول دو پاره‌خط با هم برابر است.

ب)

$$T(A)=T(۱,۴)=(۲\times۱,۴-۱)=(۲,۳)=A'$$

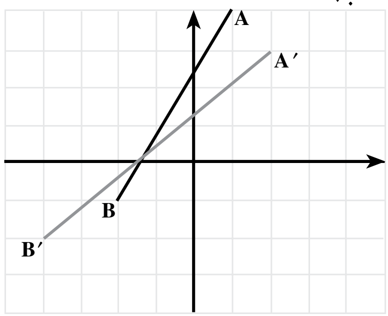
$$T(B)=T(-۲,-۱)=(۲(-۲),-۱-۱)$$

$$=(-۴,-۲)=B'$$

$$A'B'=\sqrt{(۲+۴)^۲+(۳+۲)^۲}$$

$$=\sqrt{۳۶+۲۵}$$

$$=\sqrt{۶۱}$$



شکل ۵

با توجه به اینکه $AB=\sqrt{۳۴}$ بنابراین $A'B'>AB$ یعنی طول $A'B'$ بیشتر از طول AB است.

در مثال ۴، قسمت (الف) تحت تبدیل T، فاصلهٔ نقطه‌ها تغییری نکرد یعنی فاصله‌ها حفظ شدند. درصورتیکه تحت تبدیل T قسمت (ب) فاصلهٔ نقطه‌ها تغییر کرد. اگر $AB=A'B'$ که در آن $M(A)=A'$ و $M(B)=B'$ آنگاه می‌گوییم نگاشت M فاصلهٔ نقطه‌های A و B را حفظ می‌کند.

تبدیلی که فاصلهٔ بین نقطه‌ها را حفظ کند، **ایزومتری**[1] نامیده می‌شود.

نتیجه: اگر شکلی توسط یک ایزومتری نگاشته شود، تصویر شکل با شکل اصلی همنهشت خواهد بود.

مسأله‌ها

۱. تصویر نقطهٔ $(۵,۲)$ را تحت هریک از تبدیلهای زیر به‌دست آورید.

الف) $T(x,y)=(x+۳,y-۲)$

ب) $D(x,y)=(-x,y)$

پ) $D(x,y)=(۲x,y)$

ت) $K(x,y)=(۳x-۴,۵y+۱)$

۲. الف) مربع YAZD به رأسهای $Y=(-۱,۱)$ ، $A=(۳,۱)$ ، $Z=(۳,۵)$ و $D=(-۱,۵)$ رسم کنید.

ب) تصویر مربع YAZD را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۵,y+۲)$ رسم کنید.

پ) این تبدیل را توصیف کنید.

۳. الف) متوازی‌الاضلاع IRAN به رأسهای $I=(-۲,۱)$ ، $R=(۴,۳)$ ، $A=(۵,۶)$ و $N=(-۱,۴)$ را رسم کنید.

ب) تصویر آن را تحت تبدیل $D(x,y)=(x,-y)$ رسم کنید.

پ) تبدیل بالا را توصیف کنید.

۴. $P=(۱,-۱)$ ، $Q=(۷,۲)$ و $R=(۴,۶)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) تصویر آن‌را تحت تبدیل $D(x,y)=(-x,-y)$ رسم کنید.

ب) این تبدیل را توصیف کنید.

۵. مختصات نقطه‌ای را به‌دست آورید که تصویر آن تحت تبدیلهای زیر $(۰,۶)$ باشد.

الف) $F(x,y)=(x,-y+۱۲)$

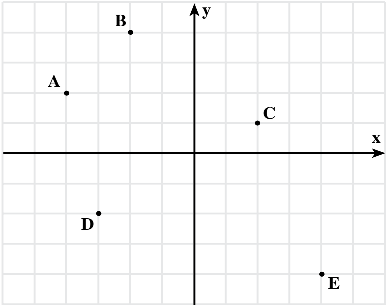
ب) $H(x,y)=(۲x,y-۱)$

پ) $G(x,y)=(y,-x)$

۶. تبدیل $T(x,y)=(x,y-۲)$ را در نظر بگیرید.

الف) تصویر نقطه‌های A، B، C، D و E را تحت تبدیل T به دست آورید.

۱ــ Isometry



ب) نقطه‌های (۳,۶)، (−۲,−۶)، (۰,۰)، (۴,−۱) و (−۳,۵) تصویر چه نقطه‌هایی هستند؟

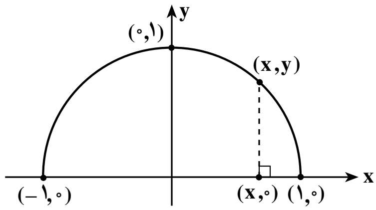
پ) آیا T یک ایزومتری است؟ پاسخ خود را با دلیل نشان دهید.

ت) قسمتهای (الف) تا (پ) را با تبدیل $T(x,y)=(۲x,۲y)$ حل کنید.

۷. هر نقطه (x,y) از نیم دایره می‌تواند به یک نقطه روی محور xها بین ۱− و ۱ نظیر شود. برای این منظور کافی است از نقطهٔ (x,y)، عمودی بر محور xها رسم کنیم که در این‌صورت (x,y) نظیر (x,۰) خواهد شد. این تبدیل **تصویر قائم** نیم‌دایره روی محور xها خوانده می‌شود.

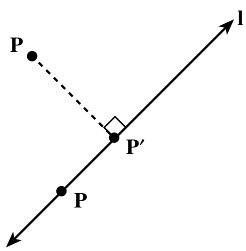
الف) آیا این تناظر نگاشتی از نیم‌دایره به محور xها است؟ توضیح دهید.

ب) اگر نگاشت است آیا یک به یک است؟ با توجه به شکل توضیح دهید.



پ) تصویر (۰,۱) و (−۱,۰) چیست؟ تصویر هر نقطهٔ دلخواه (x,y) روی نیم دایره کدام است؟

ت) $(\frac{۱}{۲},۰)$ و $(-\frac{۱}{۴},۰)$ تصویر چه نقطه‌هایی هستند؟ نقطهٔ دلخواه (x,۰) روی محور xها بین ۱− و ۱ تصویر چه نقطه‌ای از نیم دایره است؟



۸. نگاشت M را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

ــ اگر نقطهٔ P روی خط l باشد آنگاه $M(P)=P$

ــ اگر نقطهٔ P روی خط l نباشد، آنگاه $M(P)=P'$، به‌طوری که P' محل تقاطع عمودی است که از نقطهٔ P بر خط l رسم می‌شود.

الف) آیا M یک به یک است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

ب) آیا M فاصلهٔ بین نقطه‌ها را حفظ می‌کند؟ درستی پاسخ خود را با دلیل توضیح دهید.



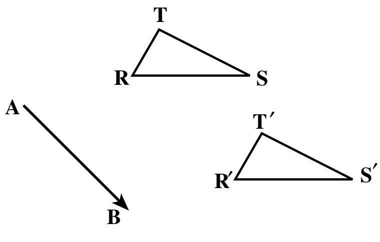
۳ــ۲ــ انتقال

در صنعت کشتی‌سازی، پس از ساخت یک کشتی برای به آب انداختن آن معمولاً از یک سطح شیب‌دار استفاده می‌کنند. به این ترتیب که کشتی را روی آن سُر داده و به آب می‌اندازند. این‌گونه حرکتها که جابجایی در یک امتداد معین را نشان می‌دهند، در زندگی روزمره بسیار به چشم می‌خورند. به عنوان مثال جابجایی آسانسور و حرکت مهرهٔ پیاده در شروع بازی شطرنج نمونه‌هایی از این نوع حرکت هستند.

آیا شما نیز می‌توانید چند نمونه از این نوع حرکت نام ببرید؟

اگر مثلث RST را در امتداد بردار AB روی صفحه سُر بدهیم، بر مثلث R′S′T′ منطبق خواهد شد. این‌گونه حرکتها در صفحه یک **انتقال**[1] را نشان می‌دهند. تحت انتقال همهٔ نقطه‌های صفحه به یک فاصله و در یک جهت جابه‌جا می‌شوند.

مثال ۱: الف) نقطه‌های (۳−,۵) ، (۴,۲) ، (۱,۳) ، (۰,۰) ، (۲−,۴−) و (۳−,۲) و تصویرهای



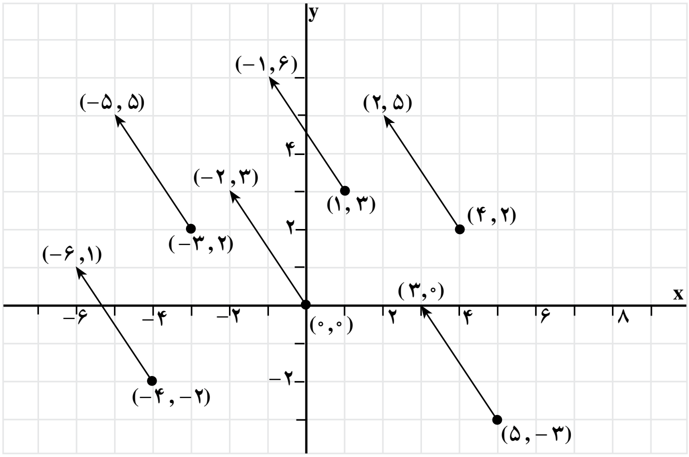
شکل ۶

۱ــ Translation

آنها را تحت تبدیل $T(x,y)=(x-۲,y+۳)$ در صفحه مشخص نمایید.

ب) هریک از نقطه‌ها را به تصویرش وصل کنید. مشاهدات خود را شرح دهید.

حل: الف)

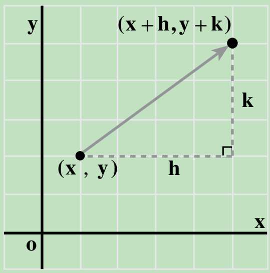


شکل ۷

ب) تبدیل T، انتقالی است که هر نقطه را ۲ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به طرف بالا می‌برد. تمام پاره‌خطهایی که از وصل کردن هریک از نقطه‌ها و تصویرهای نظیرشان به هم ایجاد شده، دارای طولهای برابر بوده و با یکدیگر موازیند.

ضابطهٔ نگاشت انتقال

تبدیل $T(x,y)=(x+h,y+k)$ به ازای هر دو عدد حقیقی ثابت h و k نشان‌دهندهٔ یک انتقال است.

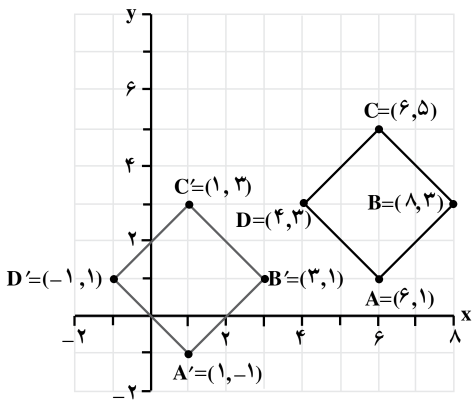


مثال ۲: $A=(۶,۱)$ ، $B=(۸,۳)$ ، $C=(۶,۵)$ و $D=(۴,۳)$ رأسهای یک مربع هستند.

الف) روی یک کاغذ شطرنجی، تصویر مربع را تحت انتقال $T(x,y)=(x-۵,y-۲)$ رسم کنید.

ب) مربع و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها با هم مقایسه کنید.

حل: الف) تبدیل‌یافتهٔ مربع ABCD تحت انتقال، چهارضلعی $A'B'C'D'$ است.



شکل ۸

ب)

$$BC=\sqrt{(۶-۸)^۲+(۵-۳)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\ \text{واحد}\quad ;\quad B'C'=\sqrt{(۱-۳)^۲+(۳-۱)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\ \text{واحد}$$

پس طول پاره‌خط BC با طول تصویرش یعنی $B'C'$ برابر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که طول سایر ضلعها نیز با طول تصویرشان برابر است. پس تحت این انتقال طول ثابت می‌ماند.

$$\text{شیب } BC=\frac{۵-۳}{۶-۸}=-۱\quad ;\quad \text{شیب } B'C'=\frac{۳-۱}{۱-۳}=-۱$$

چون دو پاره‌خط دارای شیبهای مساوی هستند پس پاره خط BC با تصویرش $B'C'$ موازی است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که سایر ضلعها نیز با تصویرشان موازی هستند. پس تحت این انتقال شیب خطها تغییر نمی‌کند.

فعالیت ۳ـ۲

نگاشت انتقال $T(x,y)=(x+h,y+k)$ را در نظر بگیرید.

۱. تصویر نقطه‌های $A=(x_۱,y_۱)$ و $B=(x_۲,y_۲)$ را تحت انتقال T به‌دست آورده آنها را A' و B' بنامید.

۲. مختصات بردارهایی را که A را به A' و B را به B' وصل می‌کند به‌دست آورید.

۳. طول پاره‌خطهای AB و $A'B'$ را به‌دست آورده آنها را با هم مقایسه کنید.

۴. شیب پاره‌خطهای AB و $A'B'$ را به‌دست آورده آنها را با هم مقایسه کنید.

ویژگیهای انتقال

ــ بردارهایی که هر نقطه را به نقطهٔ تصویرش تحت یک انتقال نظیر می‌سازند دارای طولهای مساوی و جهتهای یکسان هستند.

ــ انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

ــ انتقال یک ایزومتری است.

مثال ۳: آیا تبدیلهای داده شدهٔ زیر انتقال هستند؟ درستی جواب خود را با ذکر دلیل ثابت کنید.

الف) $T(x,y)=(x+۱,y-۲)$

ب) $T(x,y)=(۲x,y)$

پ) $T(x,y)=(x-۳,y)$

حل: مورد (الف) یک انتقال است زیرا اگر

$$T(x,y)=(x+۱,y-۲)=(x+h,y+k)$$

آنگاه

$$x+h=x+۱ \text{ و } y+k=y-۲$$

درنتیجه

$$h=۱ \text{ و } k=-۲$$

مورد (ب) یک انتقال نیست زیرا نمی‌توان عدد ثابتی مانند h را یافت به طوری که در ضابطهٔ نگاشت انتقال صدق کند یعنی

$$T(x,y)=(۲x,y)\neq(x+h,y+k)$$

مورد (پ) یک انتقال است زیرا اگر $h=-۳$ و $k=۰$ درنظر بگیریم آنگاه

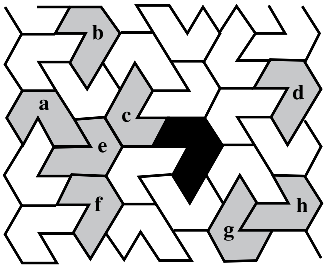
$$T(x,y)=(x-۳,y)=(x+h,y+k)$$

مسأله‌ها

۱. جدول مقابل را کامل کنید.

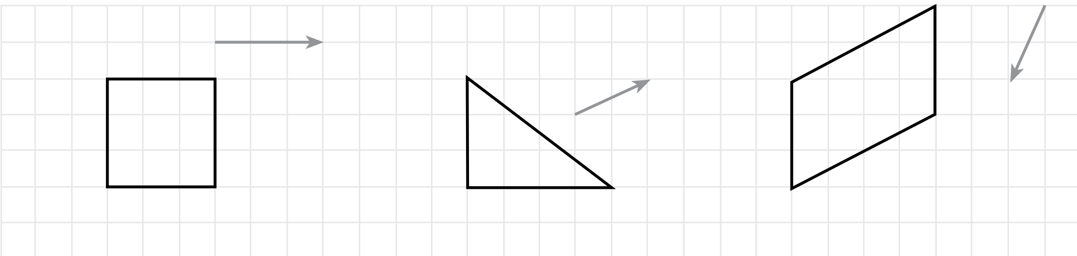
تصویر	نقطه	ضابطهٔ نگاشت انتقال
(۴,۱-)	(۰,۰)	
	(۴,۳-)	$(x,y)\to(x+۵,y+۱)$
(۳,۱-)	(۲-,۱)	
(۳-,۰)		$(x,y)\to(x,y-۲)$
(۱,۱)	(۴,۲-)	

۲. در نمودار زیر کدامیک از تصویرهای مشخص شده، تصویر انتقال یافتهٔ شکل سایه‌دار است؟



۳. تصویر انتقال یافتهٔ هریک از شکلهای زیر را در امتداد بردار داده شده رسم کنید.

الف)　　　　ب)　　　　پ)



۴. انتقال $T(x,y)=(x-۲,y+۵)$ را در نظر بگیرید.

الف) تصویر نقطه‌های (۰,۰)، (۳,۱) و (۲,−۶) را تحت انتقال T تعیین کنید.

ب) نقطه‌هایی را مشخص کنید که تصویرهایشان (۰,۳)، (۱,۷) و (۳,۱−) باشند.

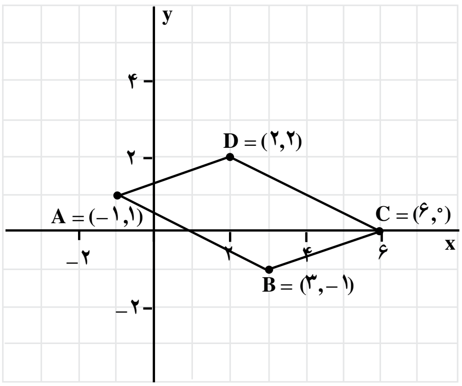
پ) همهٔ نقطه‌ها و تصویرهایشان را که در قسمتهای (الف) و (ب) به دست آورده‌اید در صفحهٔ مختصات مشخص کنید. سپس نقطه‌های متناظر را با یک پاره‌خط به هم وصل کنید.

ت) طول و شیب هر پاره‌خط را تعیین کنید.

۵. شکل مقابل را به دفتر خود منتقل کرده، سپس تصویر متوازی‌الاضلاع ABCD را تحت هر یک از انتقال‌های داده شده رسم کنید.

الف) $T_1(x,y)=(x+۵,y+۲)$

ب) $T_2(x,y)=(x-۸,y-۱)$



۶. $A=(-۴,۲)$ ، $B=(۲,۲)$ و $C=(-۴,۵)$ رأسهای یک مثلث هستند، مثلث ABC و تصویرش را تحت هریک از انتقال‌های زیر رسم کنید.

الف) $T_۱(x,y)=(x+۶,y-۳)$ ب) $T_۲(x,y)=(x-۳,y+۱)$

۷. $A=(۱,۱)$ ، $B=(۴,۲)$ ، $C=(۳,۵)$ و $D=(۰,۴)$ رأسهای یک مربع‌اند.

الف) مربع و تصویرش را تحت انتقالی که رأس A را بر روی رأس B تصویر می‌کند، رسم کنید.

ب) قاعدهٔ نگاشت این انتقال را بنویسید.

۸. تمرین ۷ را برای انتقال‌هایی که رأس A را بر روی

الف) رأس C ب) رأس D

تصویر می‌کند، تکرار کنید.

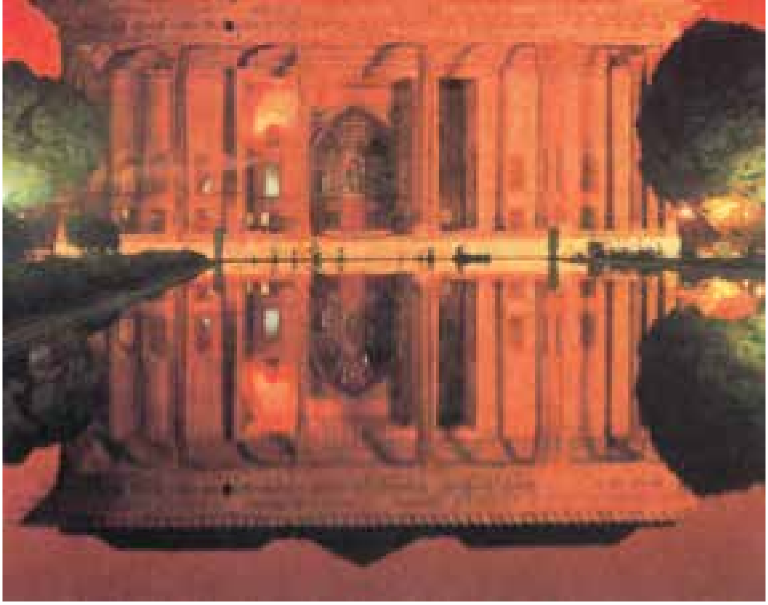
۹. $P=(-۳,۰)$ ، $Q=(۵,۴)$ و $R=(۲,-۲)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۸,y+۱)$ رسم کنید.

ب) طول ضلعها، شیب ضلعها و مساحت را در مثلث و تصویرش با هم مقایسه کنید.

۱۰. نگاشت انتقال را در تصویر زیر توصیف کنید.





کاخ چهلستون در اصفهان

۳ـ۳ ــ بازتاب

شما غالباً بازتاب ساختمانها، درختها و ابرها را در آبگیرها، استخرها، دریاچه‌ها و نهرها دیده‌اید. فروشگاهها و خانه‌ها پُر هستند از آینه‌هایی که تصویر اجسام را منعکس می‌سازند. هرگاه در آینه می‌نگرید، بازتاب[۱] خود را در آینه می‌بینید. بازتاب شما در آینه به همان فاصله از پشت آینه دیده می‌شود که شما از جلو آن.

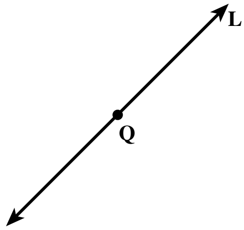
فعالیت ۳ـ۳

شکلی در سمت چپ یک ورق کاغذ بکشید. خطهای رسم شده را با مداد پر رنگ کنید. سپس کاغذ را از وسط تا کرده و روی خطهای پر رنگ شده که از پشت کاغذ مشخص هستند، شکل را دوباره برگردان کنید. چه می‌بینید؟ فرق بین شکل برگردان شده و شکل اصلی چیست؟ نقطه‌های متناظر شکلها را به هم وصل کنید. خط تای کاغذ نسبت به آنها چه وضعی دارد؟

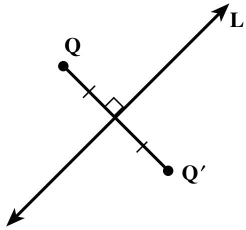
به ازای هرخط L در صفحه، **بازتاب نسبت به خط L**، تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطهٔ Q که روی خط L نباشد نقطه‌ای مانند Q' است به‌طوری که خط L عمودمنصف QQ' شود و تصویر هر نقطه مانند Q که روی خط L باشد خودش شود. خط L **محور تقارن** بازتاب نامیده می‌شود.

۱ــ Reflection

یعنی



نقطهٔ Q روی خط L است.
نقطهٔ Q بازتاب خودش است.



نقطهٔ Q روی خط L نیست.
نقطهٔ ′Q بازتاب Q نسبت به خط L است.
خط L عمودمنصف ′QQ است.

شکل ۹

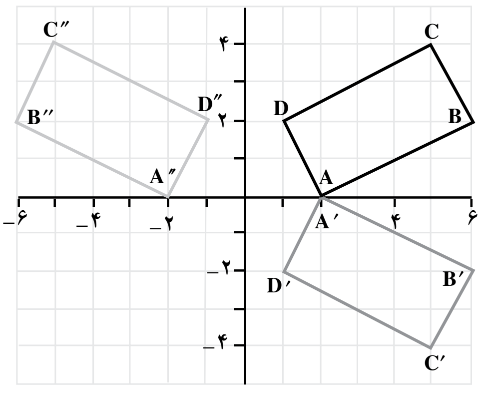
مثال ۱: $A=(۲,۰)$ ، $B=(۶,۲)$ ، $C=(۵,۴)$ و $D=(۱,۲)$ رأسهای یک مستطیل هستند. مستطیل ABCD و تصویرهایش را تحت هریک از تبدیلهای زیر در یک صفحهٔ مختصات رسم کنید، سپس ویژگی هریک از آنها را توضیح دهید.

الف) $R_۱(x,y)=(x,-y)$

ب) $R_۲(x,y)=(-x,y)$

حل:

نقطه	تصویرها	
(x,y)	$(x,-y)$	$(-x,y)$
$A=(۲,۰)$	$A'=(۲,۰)$	$A''=(-۲,۰)$
$B=(۶,۲)$	$B'=(۶,-۲)$	$B''=(-۶,۲)$
$C=(۵,۴)$	$C'=(۵,-۴)$	$C''=(-۵,۴)$
$D=(۱,۲)$	$D'=(۱,-۲)$	$D''=(-۱,۲)$



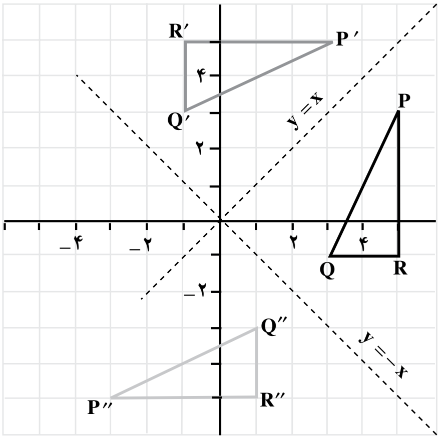
شکل ۱۰

تبدیل (الف) بازتاب نسبت به محور x ها و تبدیل (ب) بازتاب نسبت به محور y ها است.

مثال۲: $P=(۵,۳)$ ، $Q=(۳,-۱)$ و $R=(۵,-۱)$ رأسهای یک مثلث هستند. مثلث PQR و تصویرهایش را تحت هریک از تبدیلهای زیر در یک صفحهٔ مختصات رسم کرده، سپس ویژگی هر تبدیل را مشخص کنید.

الف) $R_۱(x,y)=(y,x)$ ب) $R_۲(x,y)=(-y,-x)$

حل:



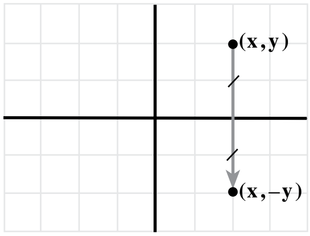
شکل ۱۱

نقطه	تصویرها	
(x,y)	(y,x)	$(-y,-x)$
$P=(۵,۳)$	$P'=(۳,۵)$	$P''=(-۳,-۵)$
$Q=(۳,-۱)$	$Q'=(-۱,۳)$	$Q''=(۱,-۳)$
$R=(۵,-۱)$	$R'=(-۱,۵)$	$R''=(۱,-۵)$

تبدیل(الف)بازتاب نسبت به خط $y=x$ و تبدیل (ب) بازتاب نسبت به خط $y=-x$ است.

ضابطهٔ هر نگاشت بازتاب بستگی به خطی دارد که **محور تقارن** آن است.

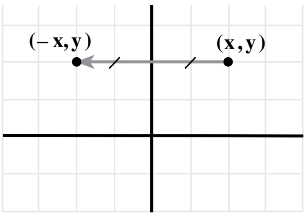
(الف)



بازتاب نسبت به محور xها :

$R(x,y)=(x,-y)$

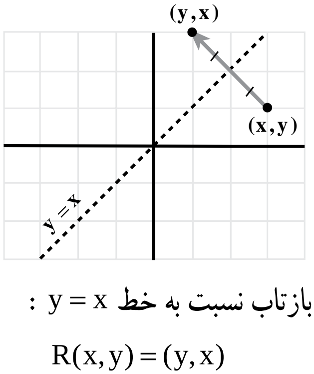
(ب)



بازتاب نسبت به محور yها :

$R(x,y)=(-x,y)$

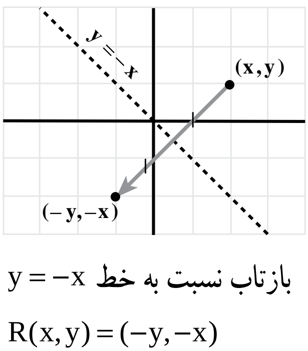
(پ)



بازتاب نسبت به خط $y=x$:

$R(x,y)=(y,x)$

(ت)



بازتاب نسبت به خط $y=-x$:

$R(x,y)=(-y,-x)$

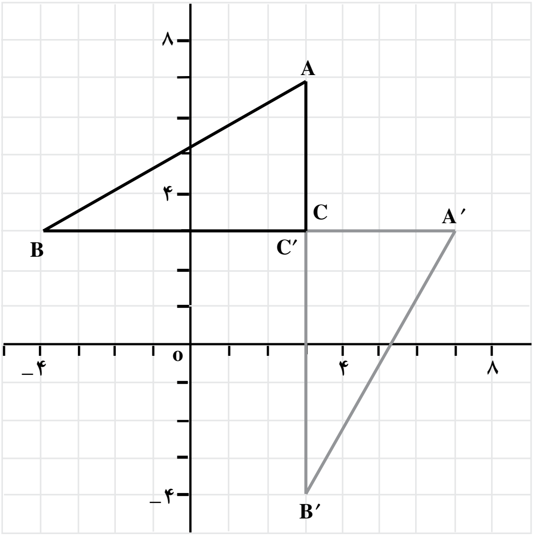
شکل ۱۲

مثال۳: $A=(۳,۷)$ ، $B=(-۴,۳)$ و $C=(۳,۳)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $R(x,y)=(y,x)$ رسم کنید.

ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها با هم مقایسه کنید.

حل: الف)



نقطه	تصویر
(x,y)	(y,x)
A = (۳,۷)	A′ = (۷,۳)
B = (-۴,۳)	B′ = (۳,-۴)
C = (۳,۳)	C′ = (۳,۳)

شکل ۱۳

ب)

$$\text{طول } AB = \sqrt{(-۴-۳)^{۲}+(۳-۷)^{۲}} = \sqrt{۶۵} \text{ واحد}$$

$$\text{طول } A'B' = \sqrt{(۳-۷)^{۲}+(-۴-۳)^{۲}} = \sqrt{۶۵} \text{ واحد}$$

طول AB، با طول تصویرش یعنی $A'B'$ برابر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد طول سایر ضلعها نیز با طول تصویرهایشان برابر هستند. تحت این بازتاب، طول ثابت می‌ماند. حال به بررسی شیب ضلعها و شیب تصویرهایشان می‌پردازیم.

$$\text{شیب } AB : \frac{۳-۷}{-۴-۳} = \frac{۴}{۷} \qquad \text{شیب } A'B' = \frac{-۴-۳}{۳-۷} = \frac{۷}{۴}$$

یعنی ضلع AB موازی تصویرش $A'B'$ نیست. پس شیب خطها تحت بازتاب الزاماً حفظ نمی‌شود.

در شکل مثال ۳، برای حرکت از A به B و به C، جهت حرکت عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، در صورتی که برای حرکت از A' به B' و به C' جهت حرکت، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. پس بازتاب جهت حرکت را عکس می‌کند.

ویژگیهای بازتاب نسبت به یک خط

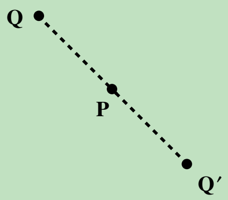
ــ بازتاب شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند.

ــ بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

ــ بازتاب یک ایزومتری است.

تاکنون بازتاب نسبت به یک خط را مورد بررسی قرار دادیم. نگاشت بازتاب نسبت به یک نقطه نیز از اهمیت خاصی برخوردار است.

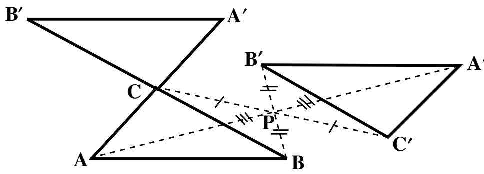
به ازای هر نقطهٔ P در صفحهٔ **بازتاب نسبت به نقطهٔ P**، نگاشتی است که تحت آن هر نقطهٔ Q در صفحه روی نقطه‌ای مانند Q' طوری نگاشته می‌شود که Q، P و Q' روی یک خط راست باشند و $PQ = PQ'$. نقطه P **مرکز تقارن** این بازتاب نامیده می‌شود.





بسیاری از پدیده‌های طبیعی متقارن هستند. ببرها نمونه‌های زیبایی از این تقارن هستند.

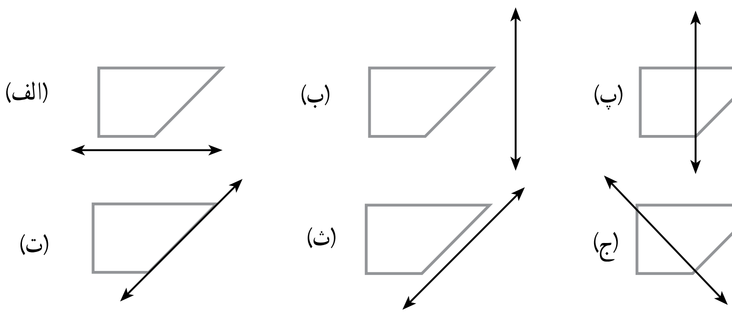
در شکل مقابل مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به نقطهٔ C است و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به نقطهٔ P است.



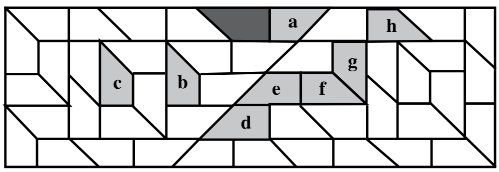
شکل ۱۴

مسأله‌ها

۱. نمودارهای زیر را دردفترتان کشیده و بازتاب آنها را تحت خطهای داده شده رسم کنید.



۲. در نمودار مقابل کدامیک از تصاویرمشخص شده، تصویر شکل سایه‌دار تحت بازتـاب نسبت به یک خط است؟



۳. $A=(۳,۱)$ ، $B=(۷,۱)$ و $C=(۷,۳)$ رأسهای یک مثلث‌اند. مثلث و تصویرش را تحت بازتاب‌های زیر رسم کنید.

الف) $R_۱(x,y)=(-x,y)$ ب) $R_۲(x,y)=(x,-y)$

پ) $R_۳(x,y)=(y,x)$ ت) $R_۴(x,y)=(-y,-x)$

۴. $J=(۲,۲)$ ، $K=(۱۰,۶)$ ، $L=(۰,۶)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت بازتاب $R(x,y)=(x,-y)$ رسم کنید.

ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحت با هم مقایسه کنید.

۵. $A=(۰,۲)$ ، $B=(-۵,۰)$ ، $C=(-۳,-۵)$ و $D=(۲,-۳)$ رأسهای یک مربع‌اند.

الف) مربع و تصویرش را تحت بازتاب $R(x,y)=(-y,-x)$ رسم کنید.

ب) مربع و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحت با هم مقایسه کنید.

۶. $P=(۲,۴)$ ، $Q=(-۱,۳)$ و $R=(۱,-۱)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $F(x,y)=(-x+۶,y)$ رسم کنید.

ب) تبدیل F را توصیف کنید.

۷. $E=(-۲,۱)$ ، $F=(-۳,-۲)$ ، $G=(۳,۰)$ و $H=(۴,۳)$ رأسهای یک متوازی‌الاضلاع هستند.

الف) متوازی‌الاضلاع و تصویرش را تحت تبدیل $T(x,y)=(y+۳,x-۳)$ رسم کنید.

ب) تبدیل T را توصیف کنید.

۸. $P=(۲,۳)$ ، $Q=(۴,-۱)$ ، $R=(۸,۱)$ و $S=(۷,۴)$ رأسهای یک چهار ضلعی هستند.

الف) چهار ضلعی و تصویرش را تحت تبدیل $G(x,y)=(-y-۱,-x-۱)$ رسم کنید.

ب) تبدیل G را توصیف کنید.

۹. $A=(۱,۴)$ ، $B=(۳,-۲)$ و $C=(۵,۱)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) تصویر مثلث ABC را تحت بازتاب نسبت به خط

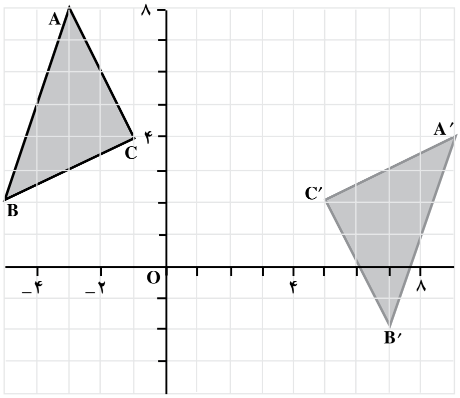
ـ $x+۲=۰$ رسم کرده آن را $A'B'C'$ بنامید.

ـ $y+۳=۰$ رسم کرده آن را $A''B''C''$ بنامید.

ب) تصویر مثلث $A'B'C'$ را تحت بازتاب نسبت به خط $y+۳=۰$ رسم کنید.

پ) تصویر مثلث $A''B''C''$ را تحت بازتاب نسبت به خط $x+۲=۰$ رسم کنید.

۱۰. در نمودار مقابل مثلث $A'B'C'$ ، تصویر بازتاب مثلث ABC است.



الف) محور تقارن را رسم کنید.

ب) معادلهٔ محور تقارن را بنویسید.

پ) تصویر $P=(-۳,۵)$ را تحت این بازتاب به دست آورید.

۱۱. تحت یک بازتاب نقطهٔ $(-۳,-۱)$ روی نقطهٔ $(۳,۵)$ تصویر می‌شود.

الف) محور تقارن را رسم کرده، تصویر نقطه‌های $(۱,۵)$ ، $(۲,-۱)$ و $(۴,-۲)$ را تحت همان بازتاب در صفحهٔ مختصات مشخص کنید.

ب) نقطه‌هایی که تحت همان بازتاب تصویرشان نقطه‌های $(۳,۲)$ ، $(-۴,۶)$ و $(-۱,-۳)$ باشند، را مشخص کنید.

پ) معادلهٔ محور تقارن را بنویسید.

۱۲. اگر O مبدأ مختصات باشد، مختصات تبدیل یافتهٔ هر نقطهٔ (x,y) تحت بازتاب نسبت به نقطهٔ O را به‌دست آورید.



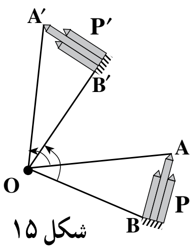
شهر بازی تهران

۳ــ۴ ــ دَوران

یک نمونه از مراکز تفریحی که در برخی شهرستانها وجود دارد، شهر بازی است. در این‌گونه مراکز وسایل بازی متعددی وجود دارد که اغلب آنها با ایجاد حرکتهای مختلف در بازدیدکنندگان شور و هیجان ایجاد می‌کند. از جمله رایجترین وسایل در این مراکز، چرخ و فلک است. حرکت چرخ و فلک به‌صورت چرخشی است که **دوران**[1] نامیده می‌شود.

حرکتهای دورانی از جمله حرکتهایی هستند که در زندگی روزمرّه بسیار با آنها سروکار داریم. به عنوان مثال، هنگام چرخاندن دستگیرهٔ در، پایین‌آوردن شیشهٔ اتومبیل، بازکردن شیر آب، تراشیدن مداد و گرداندن کلید در قفل تجربه‌ای از حرکت دورانی به‌دست آورده‌اید. آیا تا به حال به ساختار هندسی این‌گونه حرکتها نیز فکر کرده‌اید؟

فعالیت ۳ــ۴



شکل ۱۵

تصویر مقابل مدلی از یک چرخ و فلک است. این تصویر، دو وضعیت مختلف از یک موشک چرخ و فلکِ در حالِ حرکت را نشان می‌دهد. وضعیت اول موشک را با **P**، وضعیت دوم آن را با **P′** و محور چرخ و فلک را با O نشان داده‌ایم.

۱ــ Rotation

۱. A و B دو نقطه از وضعیت اول، A' و B' دو نقطهٔ متناظر آنها از وضعیت دوم موشک هستند. زاویه‌های $A\hat{O}A'$ و $B\hat{O}B'$ را به‌وسیلهٔ نقاله اندازه گرفته با هم مقایسه کنید.

۲. دو نقطهٔ متناظر دیگر روی **P** و **P′** به دلخواه در نظر بگیرید و آنها را X و X' نامگذاری کنید. اندازهٔ $X\hat{O}X'$ را تعیین کنید.

۳. تجربهٔ بند ۲ را با انتخاب نقطه‌های متناظر دیگر تکرار کنید.

۴. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم کنید. آیا این دایره از A' می‌گذرد؟

۵. دایره‌هایی به مرکز O و شعاعهای OB و OX رسم کنید. آیا این دایره‌ها نیز از B' و X' می‌گذرند؟

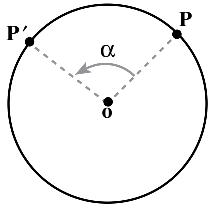
۶. آیا نتیجهٔ بند ۵، برای هر دو نقطهٔ متناظر دیگر نیز برقرار است؟

احتمالاً از انجام فعالیت بالا به این نتیجه رسیده‌اید که نقطه‌های متناظر روی دایره‌ای به مرکز O جابجا می‌شوند، که این نقطه مرکز دوران نامیده می‌شود. همانطور که مشاهده کردید از وصل کردن نقطه‌های متناظر به مرکز دوران، زاویه‌های برابر تشکیل شدند $(A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = X\hat{O}X' = \cdots)$، که این اندازهٔ مشترک زاویهٔ دوران نامیده می‌شود.

یک دوران به مرکز O و زاویهٔ α، تبدیلی است که هر نقطهٔ A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه نظیر می‌کند به‌طوری که

الف) مرکز دوران یعنی نقطهٔ O ثابت است؛

ب) اگر A نقطه‌ای غیر از O باشد، آنگاه $OA = OA'$ و $A\hat{O}A' = \alpha$ (زاویهٔ دوران).

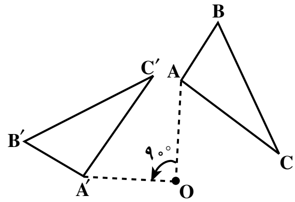


شکل ۱۶

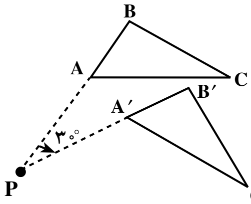
در دایره‌ای به مرکزO نقطه‌ای مانند P را در نظر گرفته و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، روی دایره از P به P' حرکت کنید. به‌طوری که $P\hat{O}P' = \alpha$. چون $OP = OP'$، پس P' تصویر نقطهٔ P تحت دوران به مرکزO و اندازهٔ α است.

اگر α یعنی اندازهٔ زاویه مثبت باشد، دوران در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است و اگر α منفی باشد دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

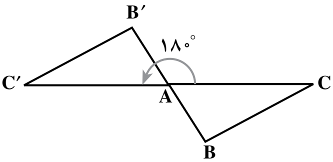
مثال ۱:



الف) مرکز دوران O
زاویهٔ دوران ۹۰°



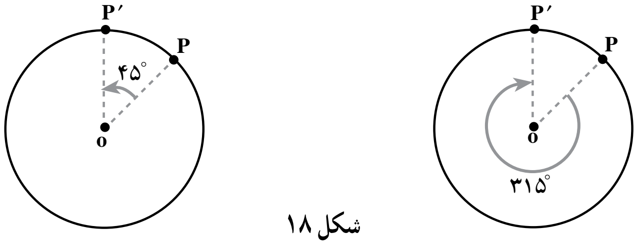
ب) مرکز دوران P
زاویهٔ دوران −۳۰°



پ) مرکز دوران A
زاویهٔ دوران ۱۸۰°

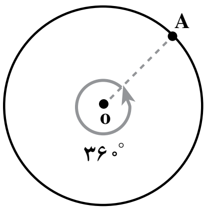
شکل ۱۷

دو دوران شکل زیر را با یکدیگر مقایسه کنید. شکل سمت چپ، P را توسط دورانی به مرکز O و زاویهٔ ۴۵° روی P′ تصویر می‌کند و شکل سمت راست P را توسط دورانی به مرکز O و زاویهٔ −۳۱۵° روی P′ تصویر می‌کند. توجّه کنید که نتیجهٔ هر دو دوران یکسان است.



شکل ۱۸

دورانی به زاویهٔ ۳۶۰° ، هر نقطه‌ای مانند A را به محل اولیّه‌اش تصویر می‌کند. یک چنین دورانی، یک **دوران کامل** خوانده می‌شود.



شکل ۱۹

مثال ۲: A = (۲,۰) ، B = (۵,۰) و C = (۵,۲) رأسهای یک مثلث هستند. در یک صفحه، مثلث ABC و تصویرهایش را تحت هر یک از تبدیلهای زیر رسم کرده سپس هر تبدیل را توصیف کنید.

الف) $R_1(x,y)=(-y,x)$

ب) $R_2(x,y)=(-x,-y)$

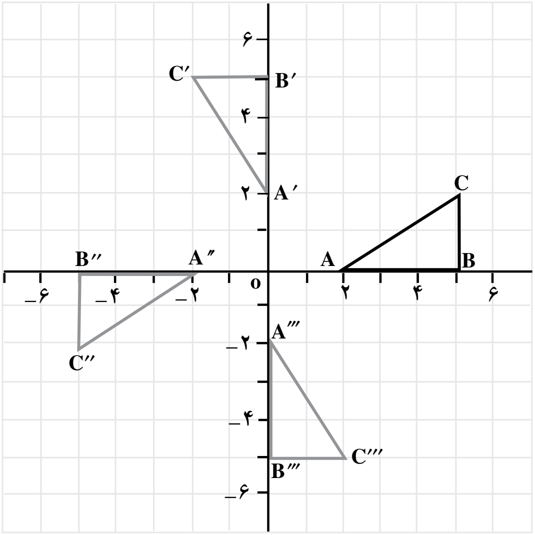
پ) $R_3(x,y)=(y,-x)$

نقطه	تصویرها		
(x,y)	$(-y,x)$	$(-x,-y)$	$(y,-x)$
$A=(۲,۰)$	$A'=(۰,۲)$	$A''=(-۲,۰)$	$A'''=(۰,-۲)$
$B=(۵,۰)$	$B'=(۰,۵)$	$B''=(-۵,۰)$	$B'''=(۰,-۵)$
$C=(۵,۲)$	$C'=(-۲,۵)$	$C''=(-۵,-۲)$	$C'''=(۲,-۵)$

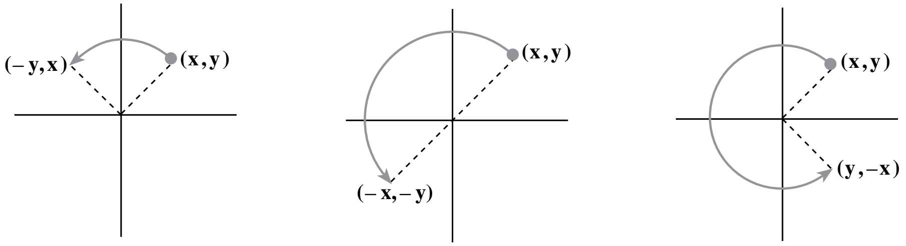
حل:

این تبدیلها، دوران‌هایی به مرکز مبدأ مختصات و به ترتیب به زاویه‌های ۹۰°، ۱۸۰° و ۲۷۰° هستند.

ضابطهٔ نگاشت برای دوران‌ها بستگی به مکان مرکز دوران و اندازهٔ زاویهٔ دوران دارد.



شکل ۲۰



$R(x,y)=(-y,x)$	$R(x,y)=(-x,-y)$	$R(x,y)=(y,-x)$
مرکز دوران $(۰,۰)$	مرکز دوران $(۰,۰)$	مرکز دوران $(۰,۰)$
زاویهٔ دوران ۹۰°	زاویهٔ دوران ۱۸۰°	زاویهٔ دوران ۲۷۰°

شکل ۲۱

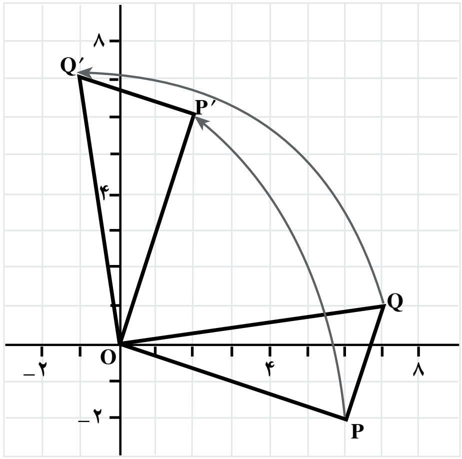
نکته: دوران به مرکز O و زاویهٔ ۱۸۰°، **بازتاب نسبت به نقطهٔ** O نیز هست. در این حالت نقطهٔ O **مرکز تقارن** است.

مثال ۳: $O=(۰,۰)$ ، $P=(۶,-۲)$ و $Q=(۷,۱)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) نمودار مثلث OPQ و تصویرش تحت تبدیل $R(x,y)=(-y,x)$ را رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلعهای مثلث و تصویرش را با هم مقایسه کنید.

حل: الف)



نقطه	تصویر
(x,y)	$(-y,x)$
$O=(۰,۰)$ $P=(۶,-۲)$ $Q=(۷,۱)$	$O'=(۰,۰)$ $P'=(۲,۶)$ $Q'=(-۱,۷)$

شکل ۲۲

این تبدیل دورانی به مرکز $O=(۰,۰)$ و زاویهٔ ۹۰° œ است.

ب)

$$PQ \text{ طول } = \sqrt{(۷-۶)^۲+(۱+۲)^۲} = \sqrt{۱۰} \qquad \text{واحد}$$

$$P'Q' \text{ طول } = \sqrt{(-۱-۲)^۲+(۷-۶)^۲} = \sqrt{۱۰} \qquad \text{واحد}$$

طول PQ و طول تصویر آن یعنی $P'Q'$ با یکدیگر برابرند. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که سایر ضلعها نیز دارای طولی برابر طول تصویرشان هستند. پس تحت این دوران طول پاره‌خطها ثابت می‌ماند.

$$PQ \text{ شیب } = \frac{۱+۲}{۷-۶} = ۳ \qquad \text{و} \qquad P'Q' \text{ شیب } = \frac{۷-۶}{-۱-۲} = \frac{-۱}{۳}$$

به طوری که دیده می‌شود، PQ بر تصویرش $P'Q'$ عمود است. می‌توان نشان داد که ضلعهای دیگر نیز بر تصویر خود عمود هستند. بنابراین، لزومی ندارد تحت دوران، شیب خطها ثابت بماند.

تحت دوران، فاصلهٔ بین نقطه‌ها ثابت می‌ماند، یعنی دوران یک ایزومتری است. پس تصویر یک شکل تحت دوران، شکلی همنهشت با شکل اولیّه خواهد بود.

با توجه به مثال ۳ ویژگیهای دوران را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت.

ویژگیهای دوران

ـ دوران مرکز دوران را ثابت نگه می‌دارد ؛

ـ دوران الزاماً شیب خط را حفظ نمی‌کند ؛

ـ دوران یک ایزومتری است.

مسأله‌ها

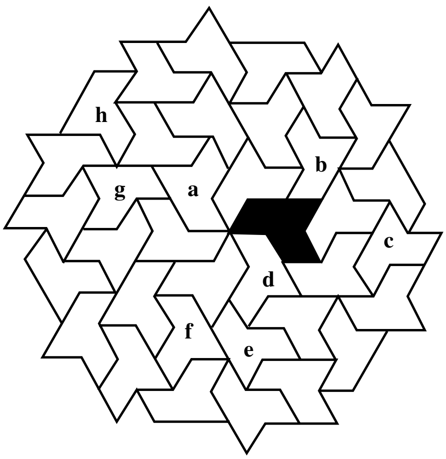
۱. دوران $R(x,y)=(-y,x)$ مفروض است.

الف) تصویر نقطه‌های (۴,۱) ، (۰,۵) و (۳,۲−) را تحت این دوران تعیین کنید.

ب) نقطه‌هایی را بیابید که تحت این دوران، تصویرشان (۲,۶) ، (۳,۰) و (۴−,۱−) باشد.

پ) همهٔ نقطه‌ها و تصویرهایی را که در (الف) و (ب) به دست آورده‌اید در صفحهٔ مختصات مشخص کنید.

۲. در نمودار زیر، با استفاده از استدلال استقرایی، تعیین کنید کدام یک از تصویرهای مشخص شده ، تصویر دوران یافتهٔ شکل سایه‌دار نسبت به یک مرکز دوران است؟

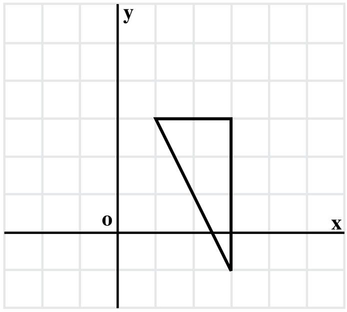


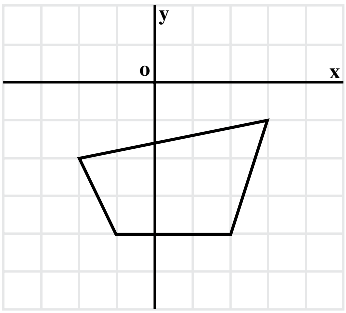
۳. با در نظر گرفتن O به عنوان مرکز دوران، دوران یافتهٔ شکلها را در هر یک از حالتهای

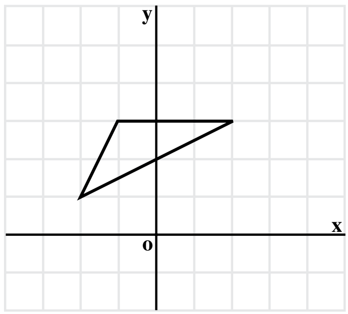
زیر رسم کنید.

الف) دوران °۹۰

ب) دوران °۱۸۰







۴. $P=(۲,۵)$ ، $A=(۴,۵)$ و $K=(۴,۱)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت دوران $R(x,y)=(-y,x)$ رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلعها و مساحت را در مثلث و تصویرش با هم مقایسه کنید.

۵. $A=(-۱,-۲)$ ، $M=(۷,۲)$ ، $I=(۵,۶)$ و $N=(-۳,۲)$ رأسهای یک مستطیل هستند.

الف) مستطیل و تصویرش را تحت دوران $R(x,y)=(y,-x)$ رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلعها و مساحت را در مستطیل و تصویرش با هم مقایسه کنید.

۶. $I=(۵,۰)$ ، $L=(۷,۰)$ و $A=(۵,۳)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $F(x,y)=(-y+۳,x-۳)$ رسم کنید.

ب) تصویر مثلث ALI را ابتدا تحت دوران $R(x,y)=(-y,x)$ پیدا کرده و آن را $A'L'I'$

بنامید. سپس تصویر $A'L'I'$ را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۳,y-۳)$ تعیین کنید. نتیجهٔ به دست آمده را با نتیجهٔ (الف) مقایسه کنید.

۷. $H=(-۳,۱)$ ، $O=(-۲,-۲)$ ، $M=(۱,-۱)$ و $A=(۳,۳)$ رأسهای یک ذوزنقه هستند. ذوزنقه و تصویرش را تحت هر یک از تبدیلهای زیر رسم کنید.

الف) $F(x,y)=(-y+۶,x)$ ب) $G(x,y)=(-x+۶,-y+۶)$

پ) $S(x,y)=(y,-x+۶)$

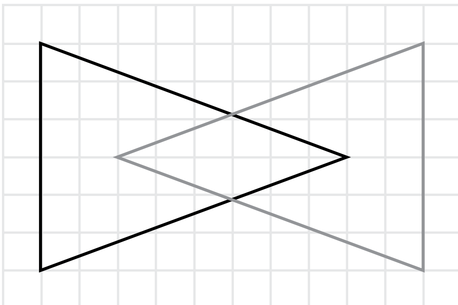
۸. $G=(۱,-۱)$ ، $O=(۲,-۵)$ ، $L=(۵,-۵)$ و $I=(۶,-۳)$ رأسهای یک چهارضلعی هستند.

الف) چهارضلعی و تصویرش را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۹,-y)$ رسم کنید.

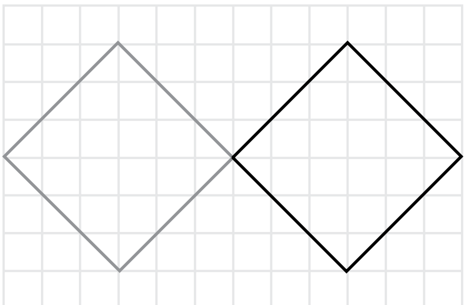
ب) نشان دهید که تبدیل T، نه انتقال است، نه بازتاب و نه دوران.

پ) این تبدیل جدید چه ویژگیهایی دارد؟

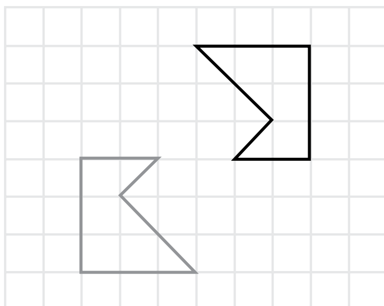
۹. شکلهای خاکستری، دوران یافتهٔ شکلهای سیاه تحت یک دوران هستند. در هر یک از موارد زیر، مرکز دوران و زاویهٔ دوران را مشخص کنید.



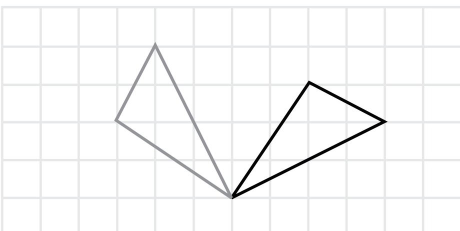
الف)



ب)



پ)



ت)



سقف مسجد شیخ‌لطف‌الله در اصفهان

۳ ــ ۵ ــ تجانس

تنها اختلافی که دو شکل متشابه با هم دارند، آن است که الزاماً ابعاد با هم یکسان نیستند. وقتی یک تصویر عکاسی را بزرگ می‌کنید، تنها تغییری که نسبت به تصویر اولیّه پیدا می‌کند آن است که با یک مقیاس، تمام ابعاد آن بزرگ می‌شود. به همین ترتیب اگر بخواهند تصویر نقشهٔ بزرگ جغرافیایی ایران را که در کلاس شما آویزان است در کتاب شما بیاورند، باید تمام ابعاد تصویر را با یک مقیاس، کوچک کنند.



$\circ < K < ۱$ $K=۱$ $K > ۱$

در واقع، تصویر جدید هم‌جنس اولی امّا با یک مقیاس، بزرگتر یا کوچکتر شده است. ساده‌ترین تبدیل از این نوع **تجانس**[۱] است. تحت تجانس، همهٔ ابعاد یک شکل با یک عامل $k \neq \circ$ که **نسبت**

ـ۱ Dilation

تجانس (مقیاس) نامیده می‌شود، بزرگ یا کوچک می‌شود.

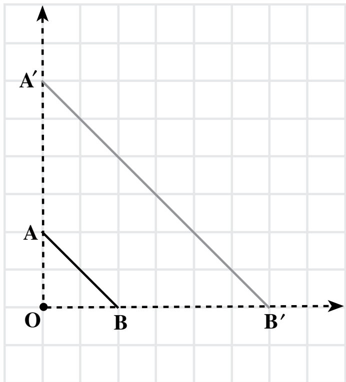
تجانس به مرکز O و نسبت k تبدیلی است که هر نقطهٔ A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه طوری نظیر کند که

الف) مرکز تجانس یعنی نقطهٔ O ثابت باشد ؛

ب) A' روی نیم خط OA قرار گیرد و $OA' = k.OA$.

توجه: در این کتاب نسبت تجانس را مثبت در نظر می‌گیریم.

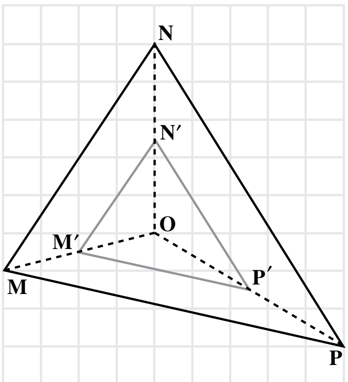
مثال ۱: شکل زیر نمونه‌هایی از تجانس را نشان می‌دهد.



الف)

مرکز تجانس O

مقیاس ۳



ب)

مرکز تجانس O

مقیاس $\frac{۱}{۲}$

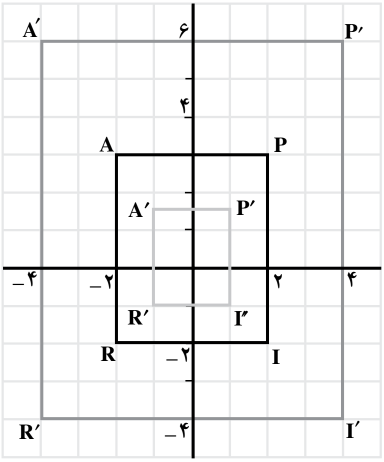
شکل ۲۳

مثال ۲: $P=(۲,۳)$ ، $A=(-۲,۳)$ ، $R=(-۲,-۲)$ و $I=(۲,-۲)$ رأسهای یک مستطیل هستند. این مستطیل و تصویرهایش را تحت هر یک از تبدیلهای زیر در یک دستگاه مختصات رسم کرده، سپس آنها را با مستطیل PARI مقایسه کنید.

الف) $D_۱(x,y)=(۲x,۲y)$

ب) $D_۲(x,y)=(\frac{۱}{۲}x,\frac{۱}{۲}y)$

حل:

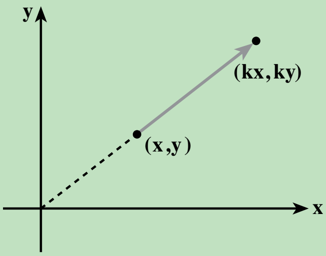


شکل ۲۴

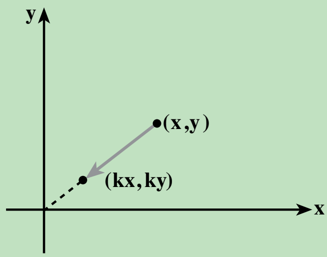
نقطه	تصویر	
(x,y)	$(۲x,۲y)$	$(\frac{۱}{۲}x,\frac{۱}{۲}y)$
$P=(۲,۳)$	$P'=(۴,۶)$	$P'=(۱,۱/۵)$
$A=(-۲,۳)$	$A'=(-۴,۶)$	$A'=(-۱,۱/۵)$
$R=(-۲,-۲)$	$R'=(-۴,-۴)$	$R'=(-۱,-۱)$
$I=(۲,-۲)$	$I'=(۴,-۴)$	$I'=(۱,-۱)$

هر دو تبدیل بالا تجانس هستند. تبدیل (الف) مستطیل را با مقیاس ۲ بزرگ کرده و تبدیل (ب) آن را با مقیاس $\frac{۱}{۲}$ کوچک کرده است.

ضابطهٔ نگاشت تجانس: تبدیل $D(x,y)=(kx,ky)$ در صفحهٔ مختصات یک تجانس با نسبت تجانس k و مرکز تجانس $(۰,۰)$ را نشان می‌دهد.



اگر $K>۱$ ، تجانس یک **انبساط** است.



اگر $۰<K<۱$ تجانس یک **انقباض** است.

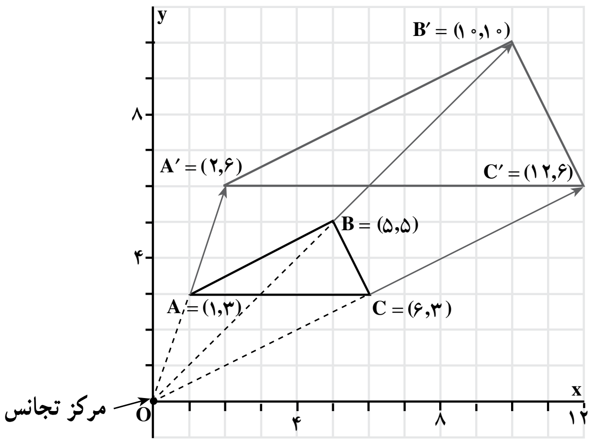
مثال ۳: $A=(۱,۳)$ ، $B=(۵,۵)$ و $C=(۶,۳)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) مثلث و تصویرش تحت تبدیل $D(x,y)=(۲x,۲y)$ را رسم کنید.

ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحتشان با هم مقایسه کنید.

پ) خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، نسبت به هم چه وضعی دارند؟

حل: الف)



شکل ۲۵

ب) طول $A'B' = \sqrt{(۱۰-۲)^۲+(۱۰-۶)^۲}$ و طول $AB = \sqrt{(۵-۱)^۲+(۵-۳)^۲}$

$= \sqrt{۶۴+۱۶}$ $= \sqrt{۱۶+۴}$

$= \sqrt{۸۰}$ $= \sqrt{۲۰}$

$= ۴\sqrt{۵}$ واحد $= ۲\sqrt{۵}$ واحد

پس $A'B' = ۲AB$. همچنین $B'C' = ۲BC$ و $A'C' = ۲AC$ (خودتان محاسبه را انجام دهید). بنابراین،

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = ۲$$

و شیب $A'B' = \frac{۱۰-۶}{۱۰-۲} = \frac{۱}{۲}$ شیب $AB = \frac{۵-۳}{۵-۱} = \frac{۱}{۲}$

درنتیجه، $A'B' \parallel AB$. حال نشان دهید که $B'C' \parallel BC$ و $A'C' \parallel AC$.

با توجه به شکل،

مساحت مثلث $ABC = \frac{۱}{۲} b.h = \frac{۱}{۲}(۵)(۲) = ۵$ (واحد^۲)

مساحت مثلث $A'B'C' = \frac{۱}{۲} b.h = \frac{۱}{۲}(۱۰)(۴) = ۲۰$ (واحد^۲)

بنابراین،

مساحت مثلث $A'B'C'$ = ۴ (مساحت مثلث ABC)

پ) از به هم وصل کردن نقطه‌های نظیر، خطهای AA' ، BB' و CC' به دست می‌آیند (شکل ۲۵). با توجه به شکل، مشاهده می‌شود خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند از مبدأ مختصات می‌گذرند. این مطلب را با استفاده از شیب خطها ثابت می‌کنیم.

$$\text{شیب } OA' = \frac{۶-۳}{۲-۰} = ۳ \qquad \text{شیب } OA = \frac{۳-۰}{۱-۰} = ۳$$

بنابراین، نقطه‌های O، A و A' روی یک خط راست قرار دارند. در این حالت نقطه‌های O ، A و A' **هم‌خط**[۱] نامیده می‌شوند. با همین استدلال نقطه‌های O، B و B' ، هم‌چنین نقطه‌های O،C و C' نیز هم‌خط هستند. بنابراین، در دو شکل مجانس، خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌نمایند که آن نقطه، همان مرکز تجانس است.

ویژگیهای تجانس

ــ تجانس شیب خط را حفظ می‌کند ؛

ــ تحت تجانس، مرکز تجانس ثابت می‌ماند ؛

ــ تجانس طول یا مساحت را حفظ نمی‌کند (مگر در حالتی که $k=۱$) ؛

ــ تجانس طول را با ضریب k و مساحت را با ضریب $k^۲$ تغییر می‌دهد ؛

ــ خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، در مرکز تجانس همرسند.

مسأله‌ها

۱. $J=(-۱,۲)$ ، $A=(۴,۲)$ ، $M=(۳,۵)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) مثلث JAM را رسم کنید.

ب) تبدیل یافتهٔ مثلث JAM را تحت $D(x,y)=(۲x,۲y)$ رسم کنید.

پ) مثلث JAM و تبدیل یافتهٔ آن را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحت با هم مقایسه کنید.

ت) نسبت تجانس و مرکز تجانس را تعیین کنید.

۲. $M=(۲,۲)$ ، $A=(۴,۲)$ و $N=(۲,-۲)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

۱ــ Collinear

الف) مثلث MAN و تصویرش مثلث $M'A'N'$ را تحت تبدیل $D(x,y)=(۳x,۳y)$ رسم کنید.

ب) MM' ، AA' و NN' را رسم کرده، سپس آنها را امتداد دهید تا یکدیگر را در $O=(۰,۰)$ قطع کنند.

پ) طول پاره‌خطهای OM' ، OM، OA' ، OA، ON' ، ON و نسبتهای $\frac{OM'}{OM}$ ، $\frac{OA'}{OA}$ ، $\frac{ON'}{ON}$ را محاسبه نمایید.

ت) طول پاره‌خطهای $M'A'$ ، MA، $A'N'$ ، AN، $M'N'$ ، MN و نسبتهای $\frac{M'A'}{MA}$ ، $\frac{A'N'}{AN}$ و $\frac{M'N'}{MN}$ را محاسبه نمایید.

ث) عامل مقیاس چقدر است؟

۳. $A=(۲,۰)$ ، $B=(۲,۳)$ ، $C=(۴,۳)$ و $D=(۴,۰)$ رأسهای یک مستطیل هستند.

الف) مستطیل و تصویر مجانس آن را با درنظر گرفتن $(۰,۰)$ به‌عنوان مرکز تجانس و $\frac{۱}{۳}$ به‌عنوان عامل مقیاس رسم کنید.

ب) این تجانس انبساط است یا انقباض؟ چرا؟

پ) طول پاره‌خطهای OB' ، OB، OC' ، OC را اندازه بگیرید و نسبتهای $\frac{OB'}{OB}$ و $\frac{OC'}{OC}$ را محاسبه نمایید.

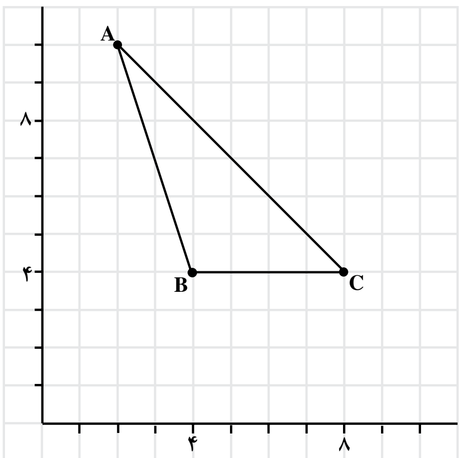
ت) مستطیل ABCD و تصویرش را از نظر طول ضلع و مساحت با هم مقایسه کنید.

۴. شکل زیر را در دفتر خود برگردان کرده، سپس با درنظر گرفتن $(۰,۰)$ به‌عنوان مرکز تجانس، تصویر مجانس مثلث ABC را با نسبتهای تجانس زیر رسم کنید.

الف) ۲

ب) ۱/۵

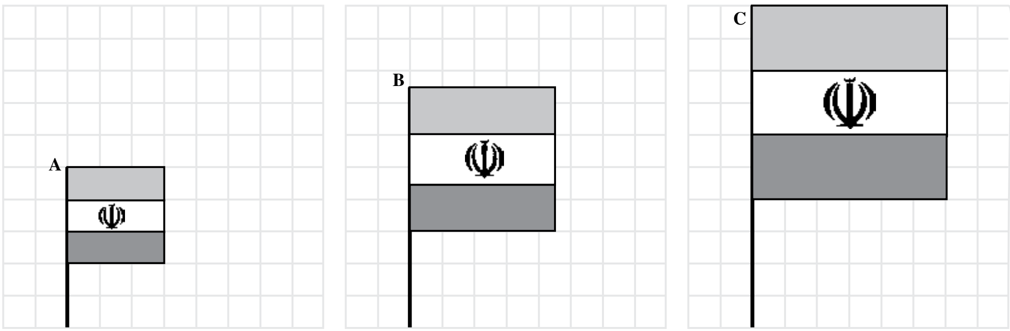
پ) ۰/۵



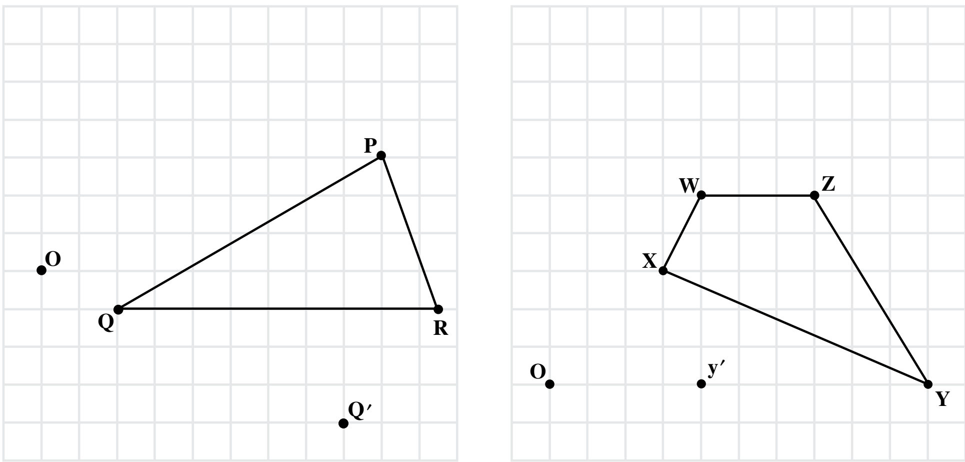
۵. با توجه به شکل زیر، نسبت تجانس یعنی k را برای هر یک از تجانس‌های زیر تعیین کنید.

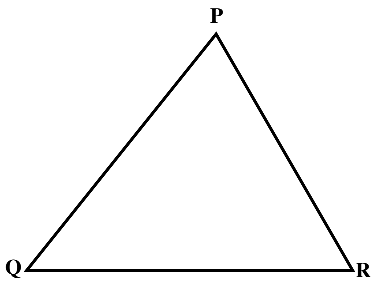
الف) A ⟶ B　　ب) A ⟶ C　　پ) B ⟶ C

ت) C ⟶ A　　ث) C ⟶ B　　ج) B ⟶ A



۶. در شکلهای زیر، مرکز تجانس (O) و تبدیل یافتهٔ یک نقطه از هر شکل داده شده است. شکلها را در دفتر خود برگردان کنید و تصویر تبدیل یافتهٔ آنها را کامل کنید.





۷. الف) مثلث PQR و تصویرهای مجانس آن را با نسبت تجانس ۲ و به مرکزهای P ، Q و R رسم کنید.

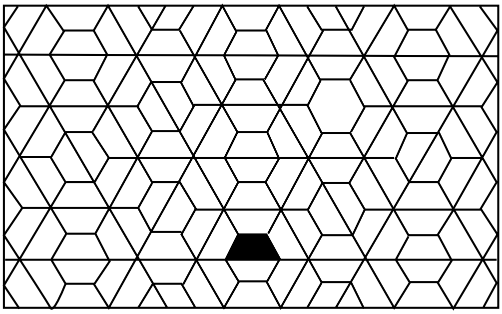
ب) در هر یک از قسمتهای بند (الف) نسبت مساحت مثلث تبدیل یافته به مثلث PQR را به‌دست آورید.

۸. مختصات رأسهای دو چند ضلعی داده شده است. با در نظر گرفتن(۰,۰) به‌عنوان مرکز تجانس، هر چند ضلعی را در یک صفحهٔ مجزا رسم کرده، تصویر مجانس آن را به ازای نسبتهای تجانس داده شده تعیین کنید.

الف) $(-۴,۱),(۲,۱),(۵,۲)$ $\qquad k = \frac{۱}{۲}$ $\qquad k = ۳$

ب) $(۰,۰),(۴,۰),(۶,۶),(۰,۴)$ $\qquad k = \frac{۱}{۲}$ $\qquad k = \frac{۳}{۲}$

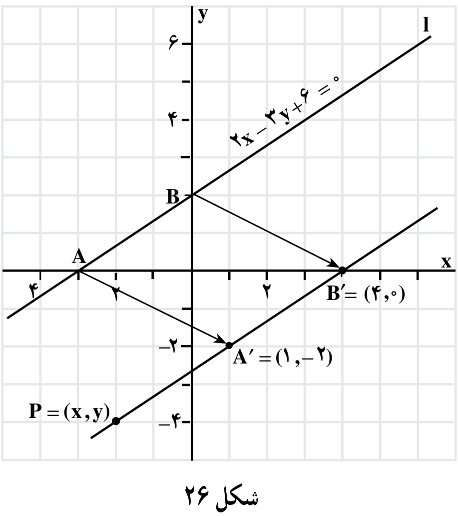
۹. نمودار زیر الگویی را نشان می‌دهد که با استفاده از یک ذوزنقه به‌دست آمده است. در این الگو مجانس‌های ذوزنقه دیده می‌شوند.



الف) سه مجانس متوالیِ ذوزنقهٔ سایه‌دار را پیدا کرده، سپس هر تصویر را با ذوزنقهٔ سایه‌دار از نظر محیط و مساحت با هم مقایسه کنید.

ب) آیا این الگو می‌تواند ویژگیهای تجانس را نشان دهد؟

۳ــ۶ ــ تبدیل یافتهٔ خط و معادلهٔ آن



شکل ۲۶

در شکل مقابل نمودار خط $۲x - ۳y + ۶ = ۰$ با l نشان داده شده است. هر یک از نقطه‌های این خط تحت انتقال $T(x,y) = (x+۴, y-۲)$ تصویر شده، یعنی ۴ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین منتقل شده است. تبدیل یافتهٔ خط را با مشخص کردن تصویر هر دو نقطهٔ آن مانند $A = (-۳,۰)$ و $B = (۰,۲)$ می‌توانیم رسم کنیم. تحت این انتقال، $A = (-۳,۰) \rightarrow A' = (۱,-۲)$ و

$B=(۰,۲)\rightarrow B'=(۴,۰)$. خط تبدیل یافته از نقطه‌های $A'=(۱,-۲)$ و $B'=(۴,۰)$ می‌گذرد.
برای تعیین معادلهٔ خط تبدیل یافته، باید معادلهٔ خطی را که از A' و B' می‌گذرد پیدا کنیم.
اگر $P=(x,y)$ یک نقطهٔ دلخواه روی خط تصویر باشد، آنگاه

$$\text{شیب } A'B' = \frac{۰+۲}{۴-۱}=\frac{۲}{۳} \qquad \text{و} \qquad \text{شیب } A'P = \frac{y+۲}{x-۱}$$

با توجه به هم‌خط بودن A' ، B' و P، شیب $A'P$ و $A'B'$ با هم برابر هستند، پس

$$\frac{۲}{۳}=\frac{y+۲}{x-۱}$$

$$۲x-۲=۳y+۶$$

$$۲x-۳y-۸=۰$$

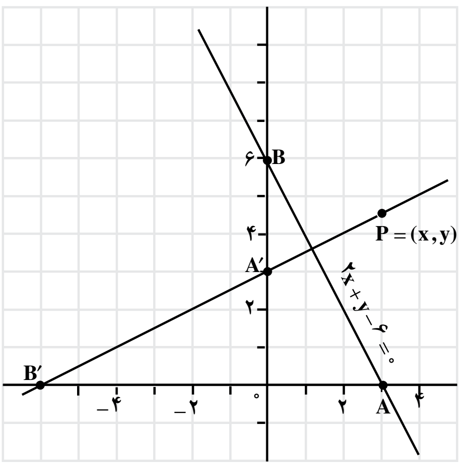
بنابراین، معادلهٔ خط تصویر $۲x-۳y-۸=۰$ است.
مثال بالا روش کلی بدست آوردن معادلهٔ تصویر یک خط تحت یک تبدیل معین را نشان می‌دهد.

روش کلی به دست آوردن معادلهٔ تصویر یک خط تحت یک انتقال، بازتاب، دوران یا تجانس:

گام اول: مختصات دو نقطهٔ دلخواه روی خط را پیدا کنید.

گام دوم: مختصات تصویر این دو نقطه را تحت تبدیل داده شده به دست آورید.

گام سوم: معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ تصویر را به دست آورید.



شکل ۲۷

مثال ۱:

الف) خط $۲x+y-۶=۰$ را رسم کنید.

ب) تصویر خط (الف) را تحت دوران $R(x,y)=(-y,x)$ رسم کنید.

پ) معادلهٔ خط تصویر را به‌دست آورید.

حل:

الف) $A=(۳,۰)$ و $B=(۰,۶)$ دو نقطه از خط هستند. با مشخص نمودن این دو نقطه خط AB را رسم می‌کنیم.

ب) تحت دوران داده شده

$A=(۳,۰)\rightarrow A'=(۰,۳)$

$B=(۰,۶)\rightarrow B'=(-۶,۰)$

خطِ تصویر یعنی $A'B'$ را رسم می‌کنیم.

پ) فرض کنید $P=(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی از خط تصویر باشد.

$A'P$ شیب $=\frac{y-۳}{x-۰}$ و $A'B'$ شیب $=\frac{۰-۳}{-۶-۰}=\frac{۱}{۲}$

با توجه به ثابت بودن شیب خط،

$$\frac{y-۳}{x}=\frac{۱}{۲}$$

$$x=۲y-۶$$

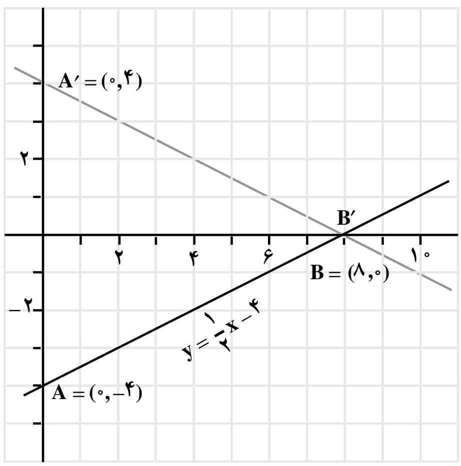
$$x-۲y+۶=۰$$

معادلهٔ خط تصویر $x-۲y+۶=۰$ است.

در مثال (۱)، معادلهٔ خط تصویر را می‌توانستیم با استفاده از شیب و عرض از مبدأ به‌دست آوریم. این روش در مثال بعد نشان داده شده است.

مثال ۲: معادلهٔ تصویر خط $y=\frac{۱}{۲}x-۴$ تحت تقارن نسبت به محور xها را به دست آورید.

حل: با درنظر گرفتن شیب خط $\frac{۱}{۲}$، و عرض از مبدأ آن (۴−)، خط را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، $A=(۰,-۴)$ و $B=(۸,۰)$، دو نقطه از خط هستند. تحت تقارن نسبت به محور x ها، $A=(۰,-۴)\rightarrow A'=(۰,۴)$ و $B=(۸,۰)\rightarrow B'=(۸,۰)$. خط تصویر یعنی $A'B'$ را رسم می‌کنیم.



شکل ۲۸

با توجه به نمودار، شیب این خط $-\frac{۱}{۲}$ و عرض از مبدأ آن ۴ است.

بنابراین، معادلهٔ خط تصویر $y=-\frac{۱}{۲}x+۴$ می‌باشد.

مسأله‌ها

۱. الف) خط $۲x+y-۴=۰$ و تصویرش را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۴,y-۲)$ رسم کنید.

ب) معادلهٔ خط تصویر را به‌دست آورید.

۲. الف) خط $l: ۲x+۶y-۱۲=۰$ و بازتاب آن را نسبت به محور xها و نسبت به محور y ها رسم کنید.

ب) معادلهٔ تصویرهای خط l تحت بازتاب نسبت به محور xها و محور yها را به دست آورید.

۳. الف) خط $y=۲x+۳$ و تصویر بازتاب آن را نسبت به خط $y=x$ رسم کنید.

ب) معادلهٔ تصویر بازتاب خط داده شده را به‌دست آورید.

۴. معادلهٔ تصویر خط $y=x+۵$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x$ را به دست آورده سپس آنها را رسم کنید.

۵. معادلهٔ تصویر خط $۳x-y+۶=۰$ تحت دوران‌های زیر را به دست آورید :

الف) ۹۰° حول $(۰,۰)$ ب) ۱۸۰° حول $(۰,۰)$

پ) ۲۷۰° حول $(۰,۰)$

۶. الف) در یک صفحهٔ مختصات، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را رسم کنید.

$L_۲: ۳x-۲y-۱۲=۰$ $L_۱: ۳x-۲y-۶=۰$

ب) ضابطهٔ سه انتقال متفاوت که تحت آنها $L_۲$ تصویر $L_۱$ باشد را به‌دست آورید.

۷. تحت یک بازتاب، تصویر خط $x+y-۳=۰$، خط $x+y+۳=۰$ است، معادلهٔ محور تقارن را پیدا کنید.

۸. تحت یک تبدیل، خط $۲x-۵y+۱۰=۰$، تصویر خط $۲x-۵y-۱۰=۰$ است. این تبدیل را به عنوان یک

الف) انتقال ب) بازتاب پ) دوران

توصیف کنید.

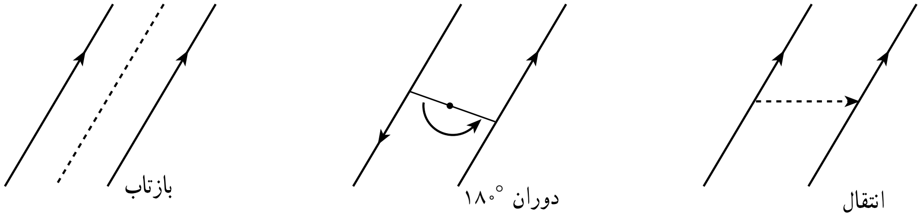
۳ــ۷ــ اثبات با استفاده از ویژگیهای تبدیلها

با توجه به بخشهای قبل، برخی از ویژگیهای تبدیلها را به صورت زیر جمعبندی می‌کنیم.

۱. در هر یک از این تبدیلها، تبدیل یافتهٔ خط راست، خط راست است.

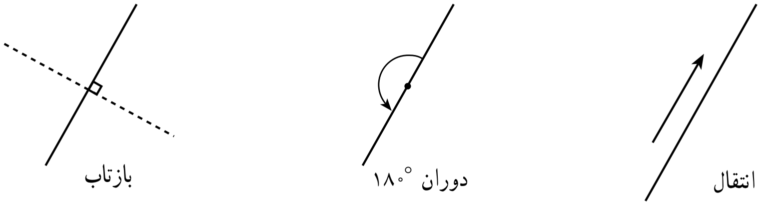
۲. طول پاره‌خط و اندازهٔ زاویه، تحت انتقال، دوران و بازتاب ثابت می‌ماند.

۳. اگر دو خط موازی باشند، هر یک از آنها می‌تواند تحت یک انتقال، دوران 180° یا بازتاب بر روی دیگری نگاشته شود.



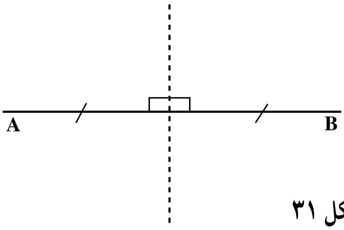
شکل ۲۹

۴. یک خط می‌تواند تحت یک انتقال، دوران 180° یا بازتاب بر روی خودش نگاشته شود.



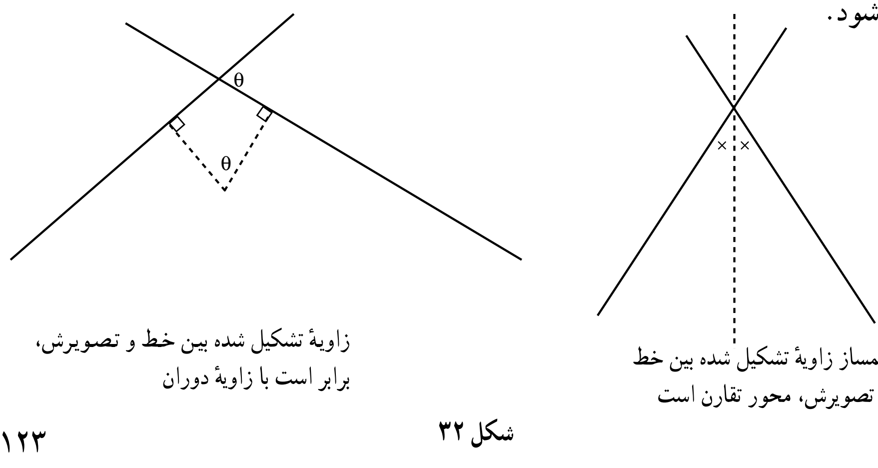
شکل ۳۰

۵. عمودمنصف هر پاره‌خط AB، محور تقارن بازتابی است که $A \to B$ و $B \to A$.



شکل ۳۱

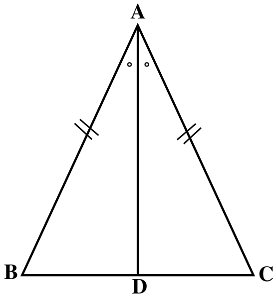
۶. اگر دو خط متقاطع باشند، هر یک از آنها می‌تواند تحت یک دوران یا بازتاب بر دیگری نگاشته شود.



شکل ۳۲

می‌توانیم از ویژگیهای فوق به‌عنوان **حقایق پذیرفته شده**، در اثبات قضیه‌ها و حل مسأله‌ها استفاده کنیم.

قضیه: زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای مساوی در مثلث متساوی‌الساقین با یکدیگر برابرند.

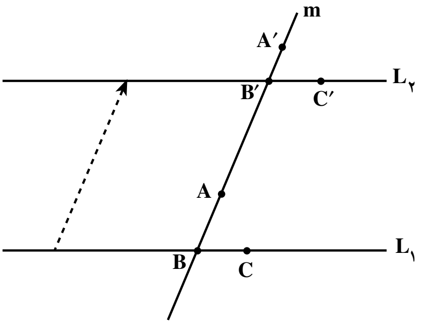


شکل ۳۳

اثبات با استفاده از بازتاب:

در مثلث ABC، $AB = AC$ و نیمساز زاویهٔ A، ضلع BC را در D قطع می‌کند. تحت بازتاب نسبت به خط AD، خطی که شامل پاره‌خط AB است، روی خطی که شامل پاره‌خط AC است تصویر می‌شود. چون $AB = AC$ پس $B \rightarrow C$. بنابراین $\hat{B} = \hat{C}$. یعنی زاویه‌های مقابل به ضلعهای مساوی در مثلث متساوی‌الساقین برابرند.

قضیه: اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های نظیر برابر خواهند بود.



شکل ۳۴

اثبات با استفاده از انتقال:

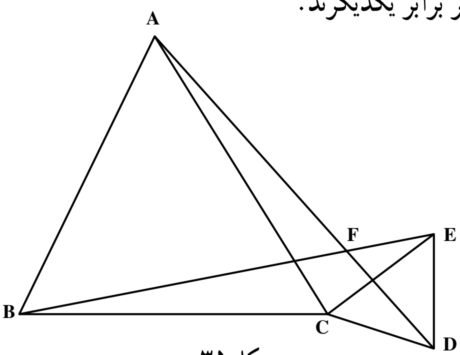
با توجه به نمادگذاری روی شکل، تحت انتقالی به موازات خط مورب m که خط L_1 را بر روی L_2 می‌نگارد، خواهیم داشت

$A \longrightarrow A'$ ، $B \longrightarrow B'$ و $C \longrightarrow C'$

بنابراین

$A\hat{B}C \longrightarrow A'\hat{B'}C'$. یعنی زاویه‌های متناظر برابر یکدیگرند.

مثال: مثلث ABC و مثلث ECD متساوی الاضلاع هستند، ثابت کنید $AD = BE$ و $A\hat{F}B = 60^\circ$.



شکل ۳۵

حل با استفاده از دوران:

تحت یک دوران 60°، حول نقطهٔ C. مثلث ACD، روی مثلث BCE تصویر می‌شود. بنابراین

$AD \longrightarrow BE$ و AD ضلع BE را با زاویهٔ ۶۰° قطع می‌کند. چون طول تحت دوران حفظ می‌شود پس $AD = BE$ و همچنین $\widehat{AFB} = ۶۰^\circ$.

توجه: این مسأله با روشهای دیگر نیز اثبات می‌شود که اغلب طولانی‌تر و پیچیده‌تر از این اثبات است به یکی از این راه‌حلها توجه کنید.

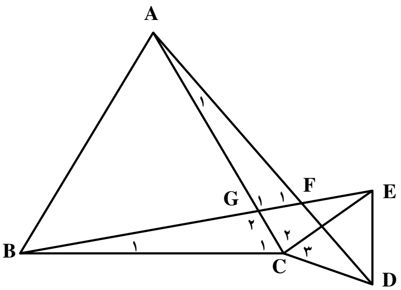
مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است بنابراین

$BC = AC \quad , \quad \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ$

مثلث ECD متساوی الاضلاع است بنابراین

$EC = CD \quad , \quad \hat{C}_۳ = ۶۰^\circ$

حال در دو مثلث BCE و ACD داریم



شکل ۳۶

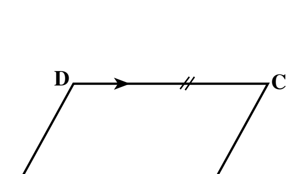
$$BC = AC$$
$$\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = \hat{C}_۳ + \hat{C}_۲$$
$$EC = CD$$

بنابراین دو مثلث BCE و ACD در حالت (ض‌زض) همنهشت هستند. بنابراین اجزای نظیرشان نیز مساوی هستند یعنی $AD = BE$.

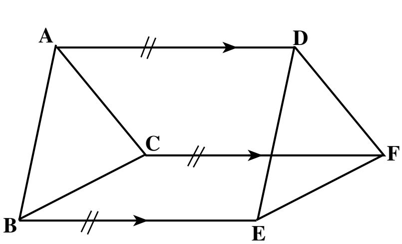
همچنین در دو مثلث AGF و BGC داریم : $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$ و $\hat{G}_۱ = \hat{G}_۱$ (چرا؟). بنابراین $\hat{F}_۱ = \hat{C}_۱$. یعنی $\hat{F}_۱ = ۶۰^\circ$.

مسأله‌ها

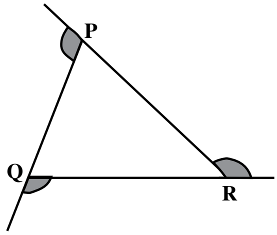
مسأله‌های ۱، ۲ و ۳ را با استفاده از انتقال حل کنید.



۱. در چهارضلعی ABCD، $AB \parallel DC$ و $AB = DC$ ، ثابت کنید $AD \parallel BC$ و $AD = BC$.



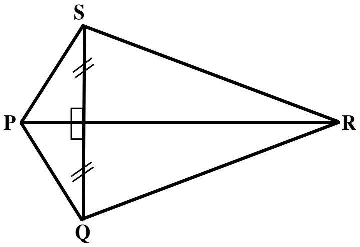
۲. پاره‌خطهای BE ،AD و CF مساوی و موازیند. ثابت کنید $ABC \cong DEF$.



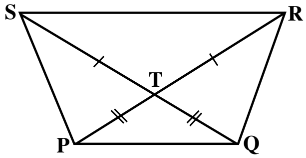
۳. در مثلث دلخواه PQR، ثابت کنید مجموع زاویه‌های خارجی ۳۶۰° است.

مسأله‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ را با استفاده از بازتاب حل کنید.

۴. ثابت کنید فاصلهٔ هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، تا دو سر آن به یک اندازه است.



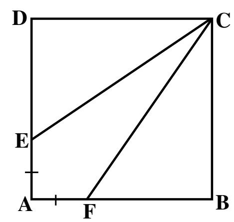
۵. در شکل روبه‌رو PR عمودمنصف QS است. ثابت کنید $S\hat{P}R = Q\hat{P}R$.

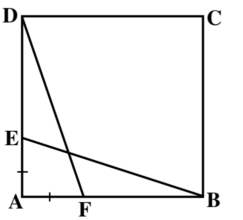


۶. در شکل روبه‌رو PR و QS قطرها، $PT = QT$ و $RT = ST$. ثابت کنید $PQS \cong QPR$.

۷. چهارضلعی ABCD یک مربع است و $AE = AF$. ثابت کنید.

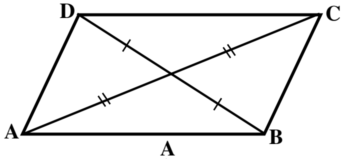
الف) $CE = CF$ ب) $BE = DF$



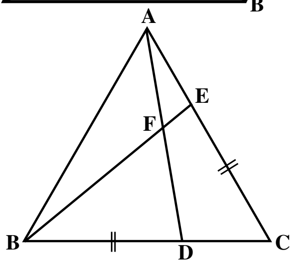


مسأله‌های ۸، ۹ و ۱۰ را با استفاده از دوران حل کنید.

۸. ثابت کنید، هرگاه دو خط یکدیگر را قطع کنند، زاویه‌های مقابل مساوی یکدیگرند.



۹. قطرهای چهارضلعی ABCD یکدیگر را نصف کرده‌اند. ثابت کنید ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.

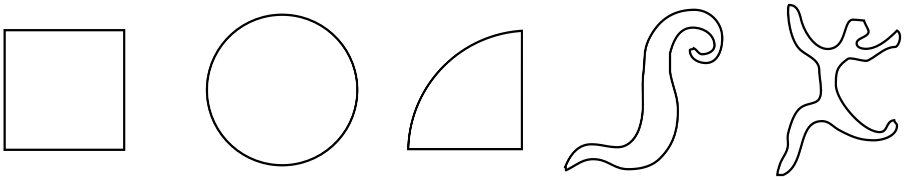


۱۰. مثلث ABC متساوی الاضلاع است و $BD = CE$. ثابت کنید $AD = BE$ و $B\hat{F}D = ۶۰^\circ$.

مجلهٔ ریاضی

در هندسهٔ اقلیدسی، اساس مقایسهٔ جسمها با یکدیگر، اندازه و شکل آنهاست.

در **توپولوژی**، دو جسم هم‌ارز هستند اگر یکی از آنها را بتوان با تغییر دادن دیگری به وسیلهٔ کشیدن، جمع کردن، خم‌کردن و چرخاندن به دست آورد، این جسمها می‌توانند بدون ایجاد هیچ برشی یا سوراخی در جسم قبلی ایجاد شوند.





بازار مسگرها در کرمان

فصل ۴

هندسه در فضا



مسجد آقا بزرگ ــ کاشان

شاهکارهای معماری ایرانی، نمادی از پیوند فرهنگ و تمدن ایرانی و اسلامی است که به بهترین شکلی نبوغ و خلاقیت شگفت‌آور و روح زیبایی‌شناسی نیاکان ما را به نمایش درآورده است. شگفت‌آورترین ویژگی پنهان در خلق این آثار تاریخی ارزشمند، نقش اساسی و بی‌همتای ریاضیات و به‌ویژه ایده‌های مهم هندسی، محور اصلی و نقطه‌ی مرکزی در پیوند و ترکیب ابعاد زیبایی‌شناسی، هنری، استحکام و روح‌افزایی این آثار شکوهمند است. با نگاهی تیزبینانه‌تر به نقش ریاضیات و هندسه در این بناهای ماندگار، به خصلت نیکوی علم‌جویی و به‌کارگیری آن در نزد نیاکان خویش پی می‌بریم که همواره زبانزد بوده است.

تقریباً اکثر گردشگران خارجی که از این آثار و بناها بازدید می‌کنند، از شکوه و زیبایی، از فضای روح‌انگیز و آرامش‌بخش معنوی آن حیرت‌زده می‌شوند. و معمولاً ویژگی‌های هنری، دانش و علم به‌کار رفته در طراحی و ساخت آنها را مورد توجه و گاهی مورد سؤال قرار می‌دهند. این کنجکاوی‌ها و احساس‌ها و پرس‌وجوها معمولاً برای کسانی که نگاه معمولی و عادی دارند ممکن

است اتفاق نیافتد، با این حال آنها که نگاه تیزبینانه‌تر دارند، وقتی در چنین محیط‌هایی و فضاهایی قرار می‌گیرند، پرسش‌های بسیاری به ذهنشان سرازیر می‌شود!

حال این سؤال مطرح است که آیا طراحان و سازندگان این بناها از دانش و علم پایه و مبنا برای طراحی و ساخت، آگاه بوده‌اند؟ دانش و علم به‌کار رفته چه بوده است؟ چه قانون‌مندی‌های علمی و هنری بکار گرفته شده است؟ چه دانش‌هایی در طراحی و ساخت آنها نقش اصلی و تعیین کننده داشته‌اند؟ آیا از فرهنگ‌های دیگر اقتباس کرده‌اند یا خودشان ابداع کرده‌اند؟...

اکنون فرض کنید همراه با دانش‌آموزان کلاس و معلم ریاضی برای گردش علمی و آموزشی به کاشان رفته‌اید و در حال بازدید از مسجد آقا بزرگ هستید! چه سؤالهایی به ذهن شما می‌رسد؟ کدام ایده‌های ریاضی و هندسی را مشاهده می‌کنید؟ در کلاس درس دربارهٔ آنها بحث همگانی کنید.

ریاضیات و مفاهیم و ایده‌های هندسی در قلب پاسخ‌های علمی این پرسش‌ها قرار دارد. به‌خصوص ایده‌های هندسی مربوط به اجسام سه‌بعدی (مثل ساختمان‌ها) نقش محوری در احداث این بناها و مساجد دارد. در این فصل به مطالعه برخی از مفاهیم و ایده‌های هندسی مربوط به فضای سه‌بعدی و اشیاء و اجسام سه‌بعدی می‌پردازیم که نقش مقدماتی و پایه برای ایده‌های پیچیدهٔ هندسی به‌کار رفته در طراحی و ساخت این آثار دارد.

۴ــ۱ــ خط و صفحه در فضا

در شکل بالا، خطها و صفحه‌های زیادی را می‌بینید. برخی از رابطه‌هایی که در این تصویر بین خطها و صفحه‌ها می‌بینید، همانهایی هستند که قبلاً با آنها آشنا شده‌اید. مطالعه وسیعتر و عمیقتر این رابطه‌ها، هدف این فصل است.

۴ــ۱ــ۱ــ صفحه در فضا

فعالیت ۴ــ۱

۱ــ در کلاس درس، به تخته کلاس روبه‌روی خود نگاه کنید و گوشه بالای سمت راست آن را نقطه A بنامید. گوشه بالای سمت چپ دیوار پشت سر خود را نیز، نقطه B بنامید.

۲ــ از نقطه A چند خط می‌گذرد؟ از نقطه B چند خط می‌گذرد؟

۳ــ از یک نقطه دلخواه چند خط می‌گذرد؟

۴ــ از دو نقطه متمایز A و B چند خط می‌گذرد؟

۵ــ با چند نقطه، می‌توان یک خط را مشخص کرد؟

۶ــ حداقل چند نقطه برای مشخص کردن یک خط، لازم است؟

این فعالیت زمینه‌ساز پذیرش اصل زیر است.

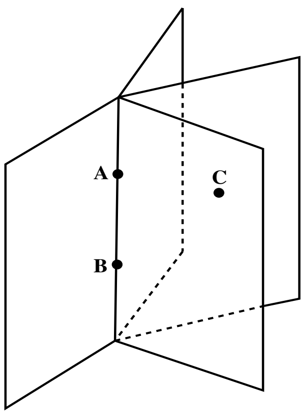
اصل ۱: از هر دو نقطه متمایز در فضا، **یک و تنها یک** خط، می‌گذرد.

توضیح: اصل ۱، دو مطلب مهم را بیان می‌کند :

الف) یک خط **وجود** دارد، که آن خط، از دو نقطه متمایز مفروض، می‌گذرد.

ب) این خط **یکتاست**. یعنی، اگر دو خط L_1 و L_2 از دو نقطه متمایز مانند A و B بگذرند، این دو خط **حتماً** بر هم منطبق می‌شوند. پس در واقع، یکی هستند.

فعالیت ۴ــ۲



۱ــ یک در را حول لولای خود (خط AB)، حرکت دهید. چه می‌بینید؟

۲ــ نقطه C را در فضا، در نظر بگیرید. آیا این در،ضمن حرکت،از نقطهٔ C می‌گذرد؟ این در، ضمن حرکت، چند بار از نقطه C می‌گذرد؟

۳ــ از هر دو نقطه A و B چند صفحه می‌گذرد؟

۴ــ با چند نقطه، می‌توان یک صفحه را مشخص کرد؟ در چه صورتی این نقطه‌ها، یک صفحه را مشخص می‌کنند؟

۵ــ برای مشخص‌کردن یک صفحه، **حداقل** چند نقطه لازم است؟

فعالیت ۴ــ۲، زمینه‌ساز پذیرش اصلهای زیر است.

اصل ۲: از هر سه نقطه در فضا که بر یک خط قرار ندارند، **یک و تنها یک** صفحه، می‌گذرد.

توضیح: اصل۲، دو مطلب مهم را بیان می‌کند :

الف) **یک صفحه وجود** دارد، که آن صفحه، از سه نقطه مفروض غیرواقع بر یک خط، می‌گذرد.

ب) این صفحه یکتاست. یعنی، اگر دو صفحه P_1 و P_2 از سه نقطه غیرواقع بر یک خط، مانند A، B و C بگذرند، این دو صفحه حتماً بر هم منطبق می‌شوند. پس در واقع، یکی هستند.

اصل ۳: در هر صفحه **حداقل** سه نقطه وجود دارد که بر یک خط قرار ندارند.

اصل ۴: حداقل چهار نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند.

تمرین ۱ ــ به نظر شما فعالیت ۲، چه کمکی به درک بهتر اصل ۲، اصل ۳ و اصل ۴ می‌کند؟ هر کدام از این اصلها از کدام قسمتهای فعالیت ۲، نتیجه می‌شوند؟ توضیح دهید.

تمرین ۲ــ ثابت کنید خارج از هر صفحه حداقل یک نقطه وجود دارد.

راهنمایی: به اصل ۴ توجه کنید.

اگر مداد خود را روی سطح یک میز قرار دهید، مداد کاملاً روی سطح میز قرار می‌گیرد. این تجربه زمینه‌ساز پذیرش اصل زیر است.

اصل ۵: اگر دو نقطه متمایز از خطی، در یک صفحه باشند، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.

تذکر: خط از هر دو طرف نامحدود است. صفحه از همه طرف نامحدود می‌باشد، بنابراین، طبیعی است که تمام صفحه را نمی‌توان در یک تصویر، نشان داد و آن‌چه که مشاهده می‌شود تنها بخشی از صفحه است.

۴ــ۱ــ۲ــ وضعیت دو صفحه نسبت به هم، در فضا: در تصویر روبه‌رو، سطح آب و هر یک از دیواره‌های «پُل‌خواجو»، بخشهایی از دو صفحه هستند و همدیگر را در **یک خط** قطع کرده‌اند.



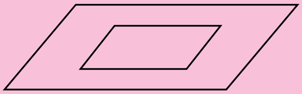
پل‌خواجو،اصفهان

اصل ۶: اگر دو صفحه متمایز یک نقطه مشترک داشته باشند، آنگاه در یک خط، مشترک خواهند بود.

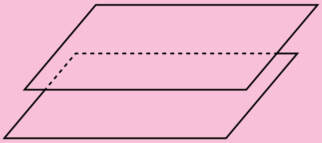
از این اصل نتیجه می‌شود که :

دو صفحه در فضا، نسبت به هم، یکی از سه وضعیت زیر را دارند :

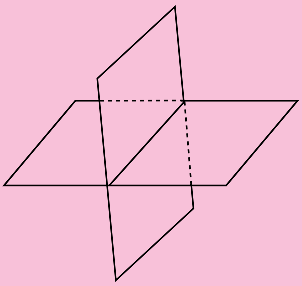
الف) بر هم منطبق هستند.



ب) هیچ نقطه مشترکی ندارند.



پ) در یک خط مشترک هستند.



در دو وضعیت (الف) و (ب)، دو صفحه را **موازی** و در وضعیت (پ)، دو صفحه را **متقاطع** می‌نامند.

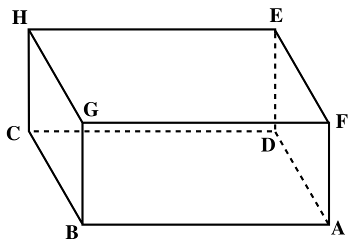
محل تقاطع دو صفحه، **فصل مشترک** آن دو صفحه نامیده می‌شود.

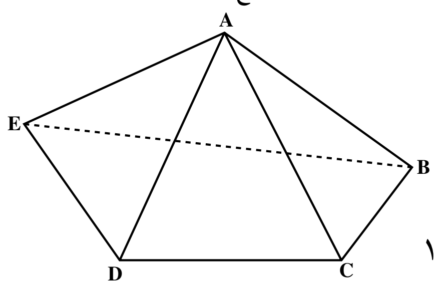
مثال: شیرازه هر کتاب، فصل مشترک تمام صفحه‌های آن کتاب است.

این مثال کمک می‌کند تا بهتر بفهمیم که چگونه از **یک خط، بیشمار صفحه می‌گذرد.**

تمرین ۱ــ با یک کتاب و سطح یک میز، وضعیتهای مختلف دو صفحه نسبت به‌هم را، نشان دهید.

تمرین ۲ــ در مکعب مستطیل و هرم داده شده، وضعیت صفحه‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید و در صورت متقاطع بودن، **فصل مشترک** آنها را مشخص کنید.





الف) صفحه‌های ADEF و BCHG در مکعب مستطیل.

ب) صفحه‌های ABC و ACD در هرم.

پ) صفحه‌های ABGF و FGHE در مکعب مستطیل.

ت) صفحه‌های ADE و ABC در هرم.

تمرین ۳ــ با استفاده از شکل تمرین (۲)، جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) در مکعب مستطیل، صفحه‌های ABC و ......، موازیند.

ب) در مکعب مستطیل، صفحه‌های ...... و BCHG متقاطعند.

پ) در مکعب مستطیل صفحه‌های ABGF و CDEH ......

ت) در مکعب مستطیل صفحه‌های CDEH و ABCD ......

ث) در هرم صفحه‌های ABE و AED ......

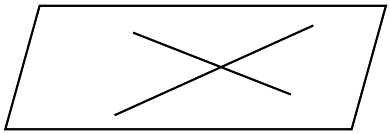
ج) در هرم صفحه‌های BCD و ADE ......



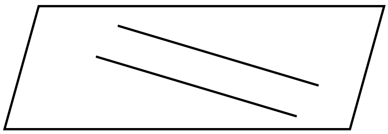
۴ــ۱ــ۳ــ وضعیت دو خط نسبت به هم، در فضا

چوب بازیِ اهالی تربت جام، شامل حرکتهای زیبایی است. این حرکتها، نمایش جالبی از وضعیت دو خط نسبت به هم در فضا هستند. مثلاً در یک حرکت، چوبها موازی هم قرار می‌گیرند و

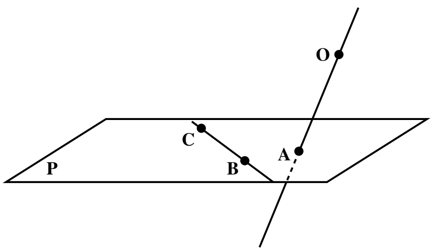
در حرکت دیگری چوبها به حالت متقاطع در می‌آیند. در این بازی حرکت دیگری هم وجود دارد که چوبها نه موازیند و نه متقاطع هستند. در این بازی، چوبها در واقع، خطهایی هستند که در فضا قرار گرفته‌اند.



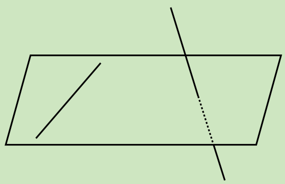
اگر دو خط در فضا، در یک صفحه قرارگرفته باشند، طبق آنچه که در هندسه مسطحه دیده‌اید، نسبت به هم یا **موازیند** یا **متقاطع** هستند.



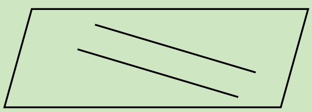
اما، می‌توانیم دو خط در فضا بیابیم که در یک صفحه قرار نگیرند.



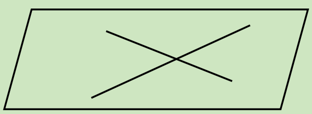
مثال: یک صفحه P و یک نقطه O خارج آن در نظر بگیرید. حال، سه نقطه مانند A، B و C غیر واقع بر یک خط در این صفحه اختیار کنید. خطهای OA و BC در یک صفحه نخواهند بود. چرا؟



۱) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند، دو خط **متنافر** می‌نامیم.



۲) دو خط در فضا را که در یک صفحه باشند و همدیگر را قطع نکنند، یا بر هم منطبق باشند، دو خط **موازی** می‌نامیم.

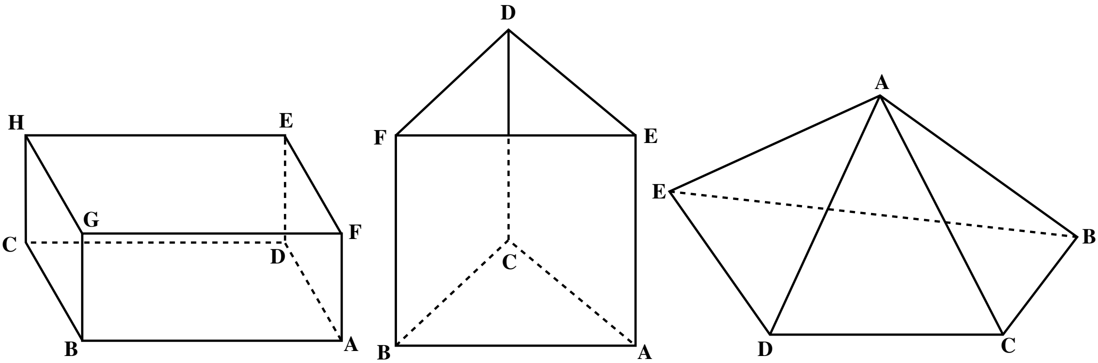


۳) دو خط در فضا را که فقط یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، دو خط **متقاطع** می‌نامیم.

از دو خط متقاطع در فضا، همواره یک صفحه می‌گذرد. توجه کنید که متقاطع نبودن دو خط متمایز در فضا، به معنای موازی‌بودن آنها نیست، بلکه متقاطع نبودن و در یک صفحه قرار داشتن دو خط، به معنای توازی دو خط متمایز در فضا می‌باشد.

دو خط در فضا نسبت به هم،یا **متنافرند**،یا **متوازی‌اند** و یا **متقاطع**.

تمرین ــ در مکعب مستطیل، منشور و هرم داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) وضعیت دو خط AB و EH نسبت به هم، در مکعب مستطیل چگونه است؟ وضعیت دو خط AB و CD نسبت به هم، در منشور چگونه است؟ وضعیت دو خط AB و AD نسبت به هم، در هرم چگونه است؟

ب) در مکعب مستطیل دو خط **متنافر** با خط AB بیابید. در منشور دو خط **موازی** با خط AE بیابید. در هرم چند خط **متقاطع** با خط AB می‌توانید بیابید؟

پ) جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

۱) در مکعب مستطیل، خط FG و خط ...... موازیند.

۲) در مکعب مستطیل، خط ...... و خط BC متقاطعند.

۳) در منشور، خط AD و خط ...... متنافرند.

۴) در منشور، خط DF و خط AC ......

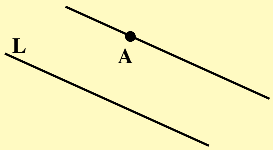
۵) در منشور، خط DC و خط ...... موازی است.

۶) در هرم، خط AC و خط ...... متنافرند.

اصل توازی اقلیدس

در هندسه مسطحه دیدیم که **از هر نقطه خارج یک خط، یک و تنها یک خط به موازات آن خط می‌گذرد.** این مطلب در فضا نیز برقرار است که آن را به عنوان یک اصل می‌پذیریم.

اصل ۷: از هر نقطه خارج یک خط در فضا، **یک و تنها یک** خط به موازات آن خط می‌گذرد.



توضیح: اصل ۷، دو مطلب مهم را بیان می‌کند :

الف) یک خط **وجود** دارد، که آن خط، از یک نقطه مفروض، به موازات یک خط مفروض می‌گذرد.

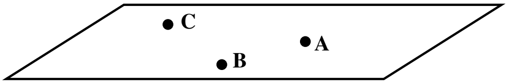
ب) این خط **یکتاست**. یعنی، اگر دو خط L_1 و L_2 از نقطه‌ای مانند A به موازات خطی مانند L بگذرند، این دو خط **حتماً** بر هم منطبق می‌شوند. پس در واقع، **یکی** هستند.

تمرین ــ اصلهای ۱ تا ۷ را مرور کنید و مشخص کنید در کدام اصلها، بر **وجود** خط یا صفحه تأکید شده است. در کدام اصلها، این وجود **یکتاست**.

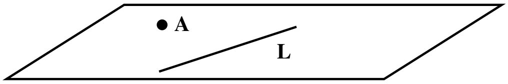
مشخص‌کردن صفحه در فضا

به طور کلی، صفحه به صورتهای زیر مشخص می‌شود.

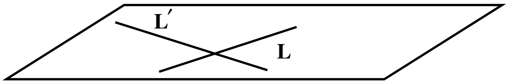
۱) از هر سه نقطه غیرواقع بر یک خط، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. (اصل ۲)



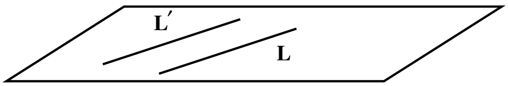
۲) از یک خط و یک نقطه خارج آن، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. چرا؟



۳) از دو خط متقاطع، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. چرا؟



۴) از دو خط متمایز موازی، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. چرا؟



صفحه در فضا را، به صورتهای دیگری نیز، می‌توان مشخص کرد.

۴ــ۱ــ۴ــ وضعیت خط و صفحه نسبت به هم، در فضا

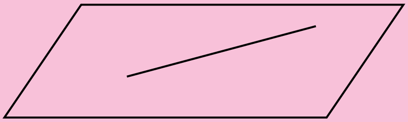
اگر دو نقطه متمایز از خطی در صفحه‌ای باشد، آن خط به تمامی در آن صفحه خواهد بود. در نتیجه، اگر خطی در صفحه‌ای قرار نداشته باشد، یا آن را قطع نمی‌کند، یا فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

خط و صفحه در فضا، نسبت به هم، یکی از سه وضعیت زیر را دارند :

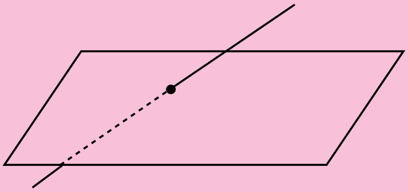
الف) خط صفحه را قطع نمی‌کند ؛



ب) خط به تمامی، در صفحه قرار می‌گیرد ؛

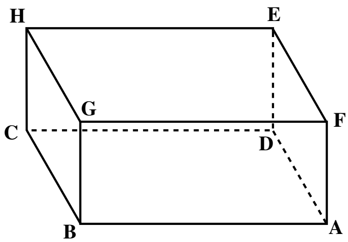


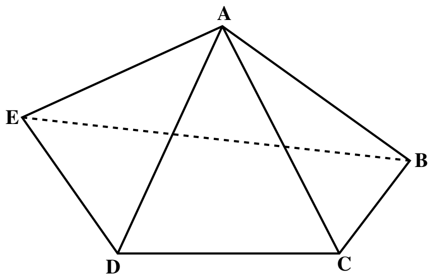
پ) خط و صفحه، در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.



در دو وضعیت (الف) و (ب)، خط و صفحه با هم **موازی** هستند و در وضعیت (پ)، خط و صفحه با هم **متقاطع** هستند.

تمرین ۱ــ در هر یک از شکلهای زیر، وضعیت خطها و صفحه‌های داده شده را نسبت به هم، مشخص کنید و در صورت متقاطع بودن، نقطه اشتراک آنها را تعیین کنید.





الف) صفحه ABGF و خط HC در مکعب مستطیل.

ب) صفحه BCDE و خط AB در هرم.

پ) صفحه EDCH و خط AD در مکعب مستطیل.

ت) صفحه ACE و خط BD در هرم.

تمرین ۲ــ با استفاده از شکلهای تمرین ۱، جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) در مکعب مستطیل خط AB با صفحه ...... موازی است.

ب) در مکعب مستطیل خط ...... با صفحه AFED متقاطع است.

پ) در مکعب مستطیل خط FG با صفحه BGHC ...... است.

ت) در هرم خط AC با صفحه ...... متقاطع است.

ث) در هرم خط ...... با صفحه ABC متقاطع است.

ج) در هرم خط BE با صفحه ...... موازی است.

مسأله‌ها

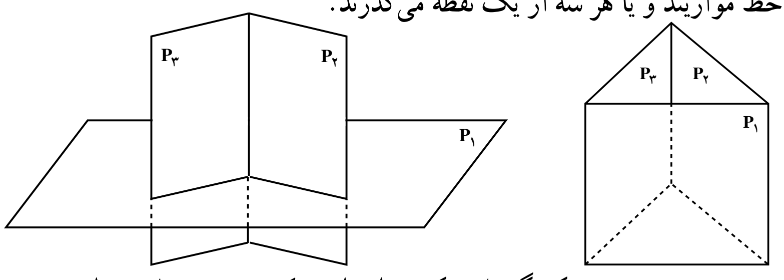
۱. اگر L_1 و L_2 دو خط متقاطع، و P_1 صفحه‌ای شامل L_1 ، و P_2 صفحه‌ای شامل L_2 باشند، وضعیت دو صفحه P_1 و P_2 نسبت به هم چگونه می‌تواند باشد؟

۲. اگر A، B، C و D چهار نقطه متمایز در فضا باشند، ثابت کنید این چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر دو خط AB و CD متقاطع یا موازی باشند.

۳. اگر سه خط L_1 ، L_2 و L_3 دو به دو متقاطع باشند، ثابت کنید این سه خط در یک صفحه قرار دارند و یا همرسند.

۴. اگر A، B، C و D چهار نقطه در فضا باشند که در یک صفحه قرار نداشته باشند، وضعیت خطهایی که از دو به دو این نقطه‌ها می‌گذرد، چگونه است؟

۵. اگر P_1 ، P_2 و P_3 سه صفحه دو به دو متقاطع باشند، ثابت کنید فصل مشترکهای این سه صفحه، یا سه خط موازیند و یا هر سه از یک نقطه می‌گذرند.



راهنمایی: دو صفحه P_1 ، P_2 یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند. وضعیت این خط و صفحه P_3 را در نظر بگیرید.



ایل گلی در تبریز

۴ــ۲ــ خطها و صفحه‌های موازی

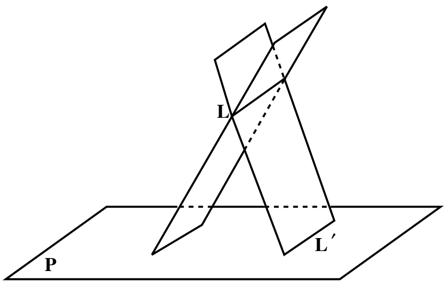
موازی بودن یک خط و صفحه در دو حالت رخ می‌دهد :

الف) خط و صفحه، هیچ نقطه اشتراکی ندارند، در نتیجه خط در صفحه قرار ندارد.

ب) خط به تمامی در صفحه قرار دارد.

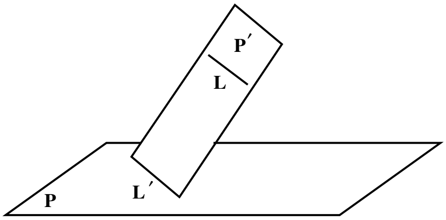
برای اثبات قضیه‌های مربوط به توازی خط و صفحه، باید هر دو حالت توازی در نظر گرفته شود.

۴ــ۲ــ۱ــ خط و صفحه موازی



اگر خط L با صفحه P موازی باشد و صفحه‌ای غیرموازی با P، از L بگذرد، P را در خطی مانند L′ قطع می‌کند. قضیه ۱ موازی بودن L و L′ را نشان می‌دهد.

قضیه ۱: اگر خط L با صفحه P موازی باشد، هر صفحه که از L بگذرد و با P متقاطع باشد، P را در یک خط موازی L قطع می‌کند.



برهان: برای اثبات این قضیه، دو حالت موازی بودن یک خط و صفحه در فضا را به تفکیک، در نظر می‌گیریم :

الف) خط L در صفحه P قرار ندارد.

فرض کنید P′ صفحه‌ای گذرنده از L باشد که P را در خط L′ قطع کند. L و L′ هر دو در صفحه P′ هستند و همدیگر را قطع نمی‌کنند، زیرا از متقاطع بودن L و L′ نتیجه می‌شود که خط L صفحه P را قطع می‌کند، که خلاف فرض است.

بنابراین، دو خط L و L′ هر دو، در صفحه P′ هستند و همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس با هم موازیند.

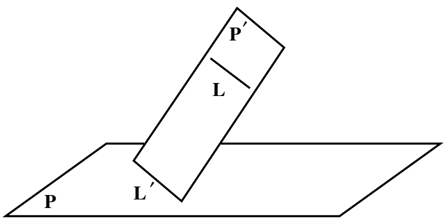
ب) خط L در صفحه P قرار دارد.

در این حالت هر صفحه P′ متمایز از P که از L می‌گذرد، صفحه P را در همان خط L قطع می‌کند و درستی قضیه روشن است.

از این قضیه، نتیجه می‌شود که اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، با خطهای بیشماری از آن صفحه موازی است.

توجه: اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، حداقل با یکی از خطهای آن صفحه موازی است. قضیه ۲ عکس این نتیجه را، نشان می‌دهد.

قضیه ۲: اگر خط L با یکی از خطهای صفحه P موازی باشد، آنگاه، خط L با صفحه P موازی است.



برهان: اگر خط L در صفحه P باشد **حکم قضیه برقرار است**. پس فرض کنید خط L در صفحه P قرار ندارد.

اگر L′ خطی از صفحه P باشد که با L موازی است، L و L′ متمایزند. صفحه‌ای را که از این دو خط موازی می‌گذرد P′ می‌نامیم. فصل مشترک دو صفحه P و P′ همان خط L′ است.

اگر خط L صفحه P را قطع کند محل تقاطع روی فصل مشترک این دو صفحه قرار دارد، یعنی دو خط L و L′ متقاطع خواهند شد که **خلاف فرض** است. پس خط L صفحه P را قطع نمی‌کند و با آن موازی است.

از این دو قضیه، نتیجه مهم زیر به دست می‌آید :

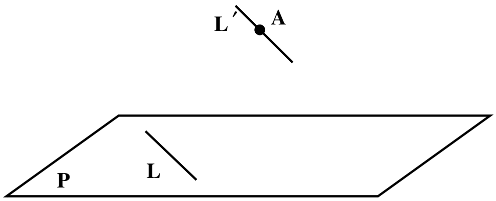
شرط توازی خط و صفحه: خط L با صفحه P موازی است، **اگر و تنها اگر**، L با یکی از خطهای صفحه P موازی باشد.

قضیه ۳: اگر خط L با صفحه P موازی و A نقطه‌ای از صفحه P باشد آنگاه، خطی که از A به موازات L رسم می‌شود، به تمامی در صفحه P قرار دارد.

این، نتیجه‌ای از قضیه ۱ و اصل توازی اقلیدس است[1].

مسأله: از نقطه A خارج صفحه P، خطی موازی P رسم کنید.

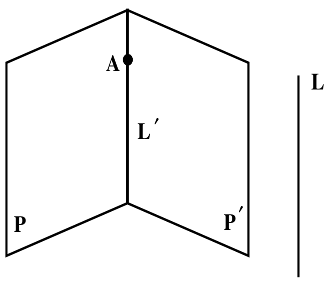
حل: در صفحه P، یک خط دلخواه L رسم کنید. از نقطه A، خط ′L را موازی L بگذرانید. ′L با یکی از خطهای صفحه P موازی است، پس خط ′L با صفحه P موازی است.



تمرین ــ چند خط می‌توان از یک نقطه مفروض موازی یک صفحه مفروض گذراند؟

نتیجه ۱ــ اگر دو خط با خط دیگری موازی باشند، آن دو خط با هم موازیند[2].

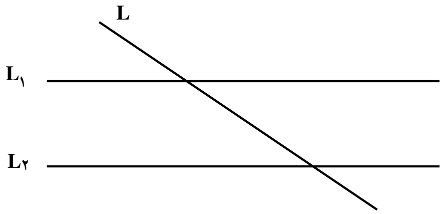
نتیجه ۲ــ اگر خطی با دو صفحه متقاطع، موازی باشد، با فصل مشترک آنها موازی است.



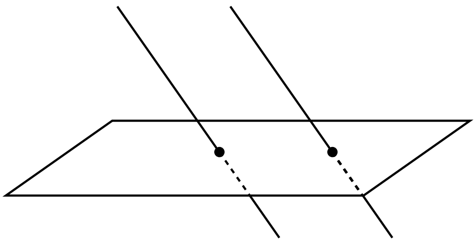
برهان: فرض کنید خط L موازی دو صفحه متقاطع P و ′P باشد. از یک نقطه فصل مشترک مانند A، خط ′L را موازی L رسم می‌کنیم. چون خط L با صفحه P موازی است، خط ′L به تمامی در صفحه P قرار دارد. با استدلال مشابه خط ′L به تمامی در صفحه ′P قرار دارد. پس، ′L همان فصل مشترک دو صفحه P و ′P است که با خط L نیز موازی است و **حکم، نتیجه می‌شود.**

۱و۲ــ اثبات در پیوست

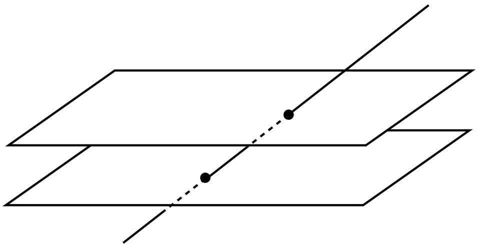
۴ــ۲ــ۲ــ چند ویژگی از خطها و صفحه‌های موازی



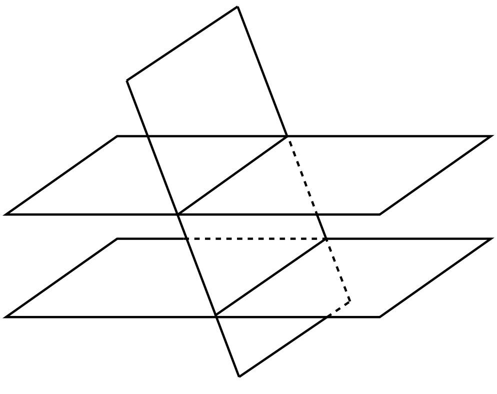
در هندسه مسطحه دیدیم، که اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند ؛ مشابه این ویژگی در فضا برای خطها و صفحه‌های موازی نیز وجود دارد، که به عنوان مثال، چند نتیجه زیر را بیان می‌کنیم :



نتیجه ۱ــ اگر صفحه‌ای یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند[1].



نتیجه ۲ــ اگر خطی یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند[2].



نتیجه ۳ــ اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند و فصل مشترکها با هم موازیند[3].

۱ــ اثبات ۱،۲و۳ در پیوست



۴ـ۲ـ۳ـ صفحه‌های موازی

سطح میز و سطح زمین را به عنوان دو صفحه متمایز و موازی در نظر بگیرید. مداد خود را روی سطح میز قرار دهید.

۱ـ مداد نسبت به سطح زمین چه وضعیتی دارد؟

۲ـ مداد با سطح زمین موازی است یا متقاطع؟ توضیح دهید.

این مشاهده، زمینه‌ساز حدس زیر است :

اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط از یکی از این دو صفحه، با صفحه دیگر موازی است.

می‌توان، با استدلال استنتاجی، درستی این حدس را ثابت کرد. بنابراین، اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط یکی از این صفحه‌ها حداقل با یک خط از صفحه دیگر موازی است. پس، هر دو خط متقاطع از یکی از این دو صفحه، با دو خط متقاطع از صفحه دیگر موازی است. قضیه ۴ درستی عکس این مطلب را نشان می‌دهد.

قضیه ۴: اگر دو خط متقاطع از صفحه‌ای با دو خط متقاطع از صفحه دیگری دو به دو موازی باشند، آن دو صفحه موازیند[1].

مسأله: از نقطه A خارج از صفحه P، یک صفحه موازی صفحه P بگذرانید.

۱ـ اثبات در پیوست

حل: از نقطه A ، دو خط متمایز موازی صفحه P رسم می‌کنیم. طبق قضیه ۴ صفحه‌ای که از این دو خط می‌گذرد، همان صفحه موردنظر است.

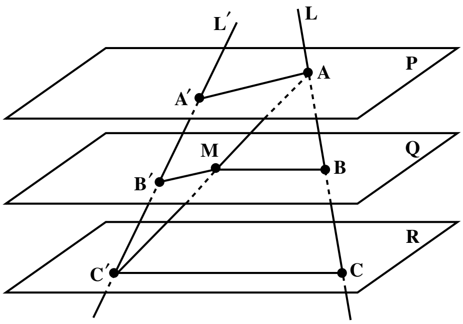
نتیجه ــ از یک نقطه خارج از یک صفحه، می‌توان صفحه‌ای موازی آن صفحه گذراند.

تمرین ــ در نتیجه بالا ثابت کنید، صفحه موازی **یکتاست**. یعنی، اگر دو صفحه Q_1 و Q_2 از نقطه A به موازات صفحه P بگذرند، این دو صفحه بر هم **منطبقند**، یعنی در واقع **یکی** هستند.

راهنمایی: به نتیجه ۳ توجه کنید.

قضیه ۵: (قضیه تالس در فضا). صفحه‌های موازی، روی دو خط که آنها را قطع می‌کنند، پاره‌خطهای متناظر متناسب ایجاد می‌کنند، یعنی اگر P، Q و R سه صفحه موازی باشند و دو خط L و L' این صفحه‌ها را به ترتیب در نقطه‌های A، B و C و A'، B' و C' قطع کنند، آنگاه :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$



برهان: طبق شکل، با فرض آن که صفحه Q بین دو صفحه P و R باشد، خط AC' را رسم کنید. این خط صفحه Q را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. صفحه گذرنده از دو خط متقاطع AC' و AC را P_1 و صفحه گذرنده از دو خط متقاطع AC' و $A'C'$ را P_2 بنامید. دو خط CC' و BM در صفحه P_1، موازیند (چرا؟). در صفحه P_1، با استفاده از قضیه تالس، نسبت زیر برقرار است.

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{MC'}$$

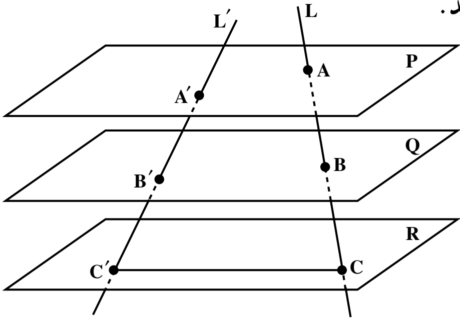
همچنین، دو خط AA' و MB' در صفحه P_2 موازیند (چرا؟)، و در صفحه P_2، با استفاده از قضیه تالس، نسبت زیر برقرار است.

$$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{AM}{MC'}$$

از این تساویها، حکم قضیه نتیجه می‌شود.

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

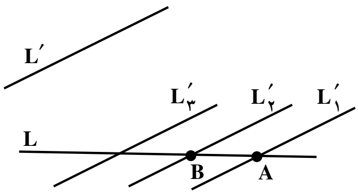
تمرین ــ سه صفحه موازی P، Q و R، دو خط متنافر L و L' را طبق شکل، به ترتیب در نقطه‌های A، B و C و A' ، B' و C' قطع کرده‌اند. اگر $\frac{AB}{BC}=\frac{۲}{۷}$ و $B'C'=۱۴$ باشد، اندازه پاره‌خط $A'B'$ را تعیین کنید.



توجه: عکس قضیه تالس در فضا، برقرار نیست. یعنی، اگر چند صفحه در فضا روی دو خط، پاره‌خطهای متناظر متناسب ایجاد کرده باشند، لزوماً آن صفحه‌ها موازی نیستند.

۴ــ۲ــ۴ــ زاویه بین دو خط در فضا

فعالیت ۴ــ۳



۱ــ دو خط متنافر L و L' را در نظر بگیرید.

۲ــ از یک نقطه مانند A روی خط L ، خط L'_1 را به موازات L' رسم کنید. خطهای L و L'_1 متقاطع می‌شوند. صفحه گذرنده از این دو خط را P بنامید.

۳ــ خط L' نسبت به این صفحه چه وضعیتی دارد؟ قضیه ۲ را فراموش نکنید!

۴ــ نقطه دیگری را نیز مانند B، روی خط L انتخاب کنید و از آن، خط L'_2 را به موازات L' رسم کنید. خط L'_2 نسبت به صفحه P چه وضعیتی دارد؟

۵ــ کدام مطلب به شما کمک کرد، تا وضعیت L'_2 را نسبت به صفحه P تشخیص دهید؟

۶ــ نقطه دلخواه دیگری نیز، روی خط L انتخاب کنید و از آن، خط L'_3 را به موازات L' رسم کنید. وضعیت L'_3 نسبت به صفحه P چگونه است؟

۷ــ توضیح دهید که چرا خطهای L، L'_1 ، L'_2 ، L'_3 همگی در یک صفحه قرار دارند.

۸ــ آیا می‌توانید با استفاده از این فعالیت، زاویه بین دو خط متنافر را تعریف کنید؟ به آن فکر کنید! از فعالیت ۴ــ۳، می‌توان زاویه بین دو خط متنافر را به صورت زیر تعریف کرد :

دو خط متنافر L و L' داده شده‌اند. اگر از هر نقطه روی L یا L' خطی موازی دیگری رسم شود، زاویه حاده یا قائمه بین این دو خط متقاطع، **زاویه بین آن دو خط متنافر**، نامیده می‌شود.

با استفاده از این تعریف، عمود بودن دو خط در فضا، به صورت زیر تعریف می‌شود :

دو خط L و L' را **عمود** بر یکدیگر نامیم، هرگاه زاویه بین آنها، **قائمه** باشد.

تمرین ــ به محیط اطراف خود به دقت بنگرید و خطهای متنافر عمود بر هم را شناسایی کنید.

نتیجه ۱ــ اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری هم عمود است.

همچنین، از فعالیت ۴ــ۳، نتیجه می‌شود که :

نتیجه ۲ــ اگر L و L' دو خط متنافر باشند، یک صفحه شامل L وجود دارد که با L' موازی باشد.

می‌توان ثابت کرد که صفحه شامل L و موازی L' یکتاست[1].

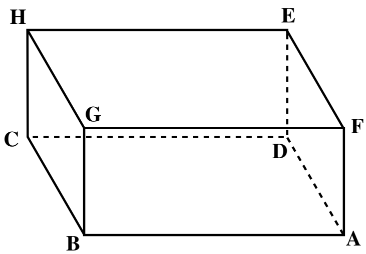
تمرین ــ با توجه به مکعب مستطیل زیر، جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

۱) یال AB با یال ...... موازی است.

۲) یال ...... بر یال FE عمود است.

۳) یال GH و یال DE ......

۴) یال AD و یال HC ......



۱ــ اثبات در پیوست

مسأله‌ها

۱. ثابت کنید که اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط واقع بر یکی از این صفحه‌ها، با صفحه دیگر موازی است. آیا عکس مطلب نیز درست است؟ یعنی، اگر هر خط از صفحه مفروضی، با صفحه مفروض دیگری موازی باشد، آیا آن دو صفحه موازیند؟

۲. از نقطه O خارج از صفحه P چند خط می‌گذرد که با P موازی است؟ از نقطه O خارج از یک خط مانند L چند صفحه می‌گذرد که با L موازی است؟

۳. اگر O نقطه‌ای خارج از صفحه‌ای مانند P باشد، ثابت کنید کلیه خطهای گذرنده از O که با P موازی هستند در یک صفحه موازی P قرار دارند.

۴. اگر دو صفحه با صفحه سومی موازی باشند، خودشان با هم موازیند.

۵. اگر صفحه‌ای با یکی از دو خط موازی، موازی باشد با دیگری هم موازی است.

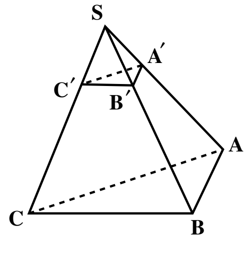
۶. ثابت کنید خطی که با یکی از دو صفحه موازی، موازی است با دیگری هم موازی است.

۷. در فضا، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، آیا لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند؟ در صورت درستی این حکم، آن را ثابت کنید و در صورت نادرستی، یک مثال با شکل رسم کنید.

۸. اگر دو خط در دو صفحه موازی قرار داشته باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت این دو خط موازیند. در صورت درستی آن را ثابت کنید و در صورت نادرستی یک مثال با شکل رسم کنید.

۹. ثابت کنید که در یک هرم، وسط یالهای آن، در یک صفحه موازی صفحه قاعده قرار دارند.

۱۰. در هرم روبه‌رو صفحه $A'B'C'$ موازی صفحه قاعده ABC است و $SA = ۵SA'$. نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC چقدر است؟





ساختمان شمس‌العماره در تهران

۴ــ۳ــ خطها و صفحه‌های عمود برهم

ایده‌های هندسی فراوانی در ساختمان بناها بکار گرفته می‌شوند. مفهوم تعامد و عمود بودن برسطح زمین در مورد ستونهای اصلی و دیوارها از اصول اولیه در ساختن بناها می‌باشد. در واقع رعایت اصول ریاضی و هندسی موجب بقاء و پایداری این‌گونه بناها می‌شود. تصویر بالا یکی از آثار باستانی ارزشمند است که شمس‌العماره نامیده می‌شود. این بنا مملو از ایده‌های زیبای هندسی است. به آن فکر کنید و ایده‌های مربوط به خطها و صفحه‌های عمود بر هم را تجسم کنید.



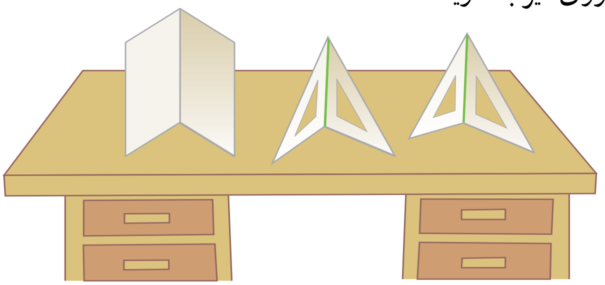
تخت‌جمشید در فارس

۴ــ۳ــ۱ــ خط عمود بر صفحه

خط L بر صفحه P عمود است، هرگاه صفحه P را قطع کند و بر هر خط صفحه P که از نقطه تقاطع می‌گذرد، عمود باشد.

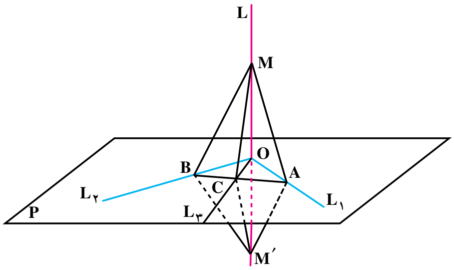
چون هر صفحه را، با دو خط غیرموازی آن می‌توان مشخص کرد، به نظر می‌رسد که برای عمود بودن یک خط بر صفحه، کافی است آن خط بر دو خط غیرموازی از آن صفحه عمود باشد. روش عملی زیر برای ساختن خط عمود بر یک صفحه، این حدس را تقویت می‌کند.

دو گونیا بردارید و از هرکدام، یک ضلع زاویه قائمه را، به گونه‌ای روی سطح میز قرار دهید که در یک امتداد نباشند و ضلع دیگر زاویه قائمه آنها، برهم منطبق شوند. کتاب هندسه خود را باز کنید و مطابق شکل زیر روی میز بگذارید.



درهر وضعیتی که دو گونیا را مطابق شرایط بالا قرار دهید، ضلع مشترک دو گونیا، بر صفحه سطح میز عمود می‌شود. به همین ترتیب فصل مشترکهای صفحه‌های کتاب نیز برصفحه سطح میز عمود است.

قضیه ۶: (قضیه اساسی تعامد). خط L بر صفحه P عمود است اگر و تنها اگر، صفحهٔ P را قطع کند و بر دو خط غیرموازی آن که از نقطهٔ تقاطع می‌گذرند، عمود باشد.



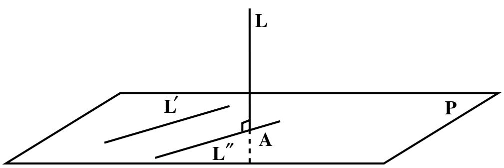
برهان: اگر خط L بر صفحه P عمود باشد، طبق تعریف، صفحهٔ P را قطع می‌کند و بر هر خط این صفحه که از نقطه تقاطع می‌گذرد، عمود است. در نتیجه بر آن دو خط غیرموازی گذرنده از نقطهٔ تقاطع نیز عمود است. برعکس، فرض کنید L صفحه P را در نقطه‌ای مانند O قطع کند و بر دو خط غیرموازی این صفحه مانند L_1 و L_2 که از O می‌گذرند عمود باشد. باید ثابت کنیم که L بر هر خطی از این صفحه مانند L_3 که از O می‌گذرد، عمود است. نقطه‌های A و B را به ترتیب روی L_1 و L_2 چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB، خط L_3 را در نقطه‌ای مانند C قطع کند. روی خط L و در دو طرف نقطه O، نقطه‌های M و M' را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $OM = OM'$ باشد. در صفحه گذرنده از خط L و نقطه A، خط OA عمودمنصف پاره‌خط MM' است، پس، $AM = AM'$. با استدلال مشابه، نتیجه می‌شود $BM = BM'$. بنابراین، دو مثلث MAB و $M'AB$ به حالت (ض‌ض‌ض)، همنهشتند. در نتیجه، دو زاویه $M\hat{A}C$ و $M'\hat{A}C$ مساویند و دو مثلث MAC و $M'AC$ نیز به حالت (ض‌زض) همنهشت هستند.

پس، $MC = M'C$ و مثلث MCM'، در رأس C متساوی‌الساقین است و چون OC میانه وارد بر ضلع MM' است. پس، خط OC بر خط MM' عمود است، یعنی خط L بر خط L_3 عمود است.

تعمیم قضیهٔ اساسی تعامد

با توجه به تعریف عمودبودن دو خط متنافر، می‌توان نشان داد که **اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر هر خط از آن صفحه نیز، عمود است.**

برای نشان دادن این مطلب، فرض کنید خط L بر صفحه P عمود است و آن‌را در نقطه A قطع کرده است. فرض کنید L' خط دلخواهی در صفحه P باشد. از نقطه A در صفحه P خط L'' را به موازات L' رسم می‌کنیم. از آنجا که L بر L'' عمود است و L'' با L' موازی است، L بر L' هم عمود است.



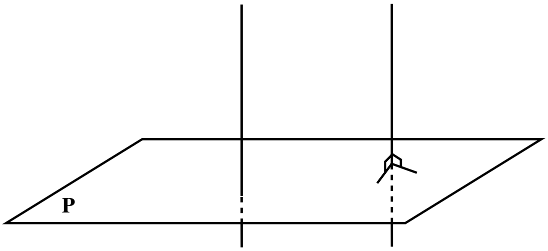
برعکس، اگر خط L بر همهٔ خطهای صفحهٔ P عمود باشد، می‌توان نشان داد که L بر صفحهٔ P عمود است. کافی است ثابت کنیم L صفحهٔ P را قطع می‌کند. بدین منظور می‌توان نشان داد که اگر خطی بر دو خط غیرموازی صفحه‌ای عمود باشد، با آن صفحه متقاطع است[1]. بنابراین :

خط L بر صفحه P عمود است **اگر و تنها اگر**، L بر همهٔ خطهای صفحهٔ P عمود باشد.

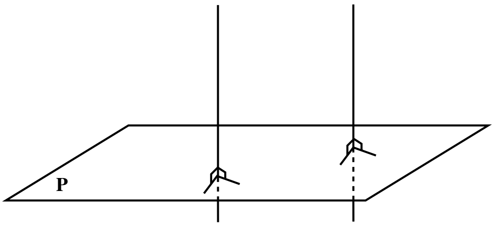
و قضیهٔ اساسی تعامد را به صورت زیر می‌توان تعمیم داد :

خط L بر صفحهٔ P عمود است **اگر و تنها اگر**، بر دو خط غیرموازی از P عمود باشد.

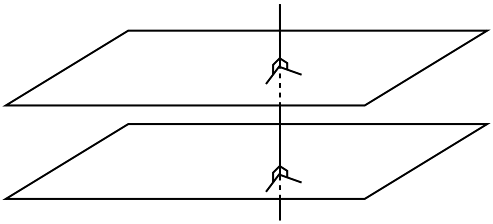
نتیجه ۱ــ اگر یکی از دو خط موازی بر یک صفحه عمود باشد، دیگری هم بر آن صفحه عمود است.[2]



نتیجه ۲ــ دو خط عمود بر یک صفحه، با هم موازیند.[3]

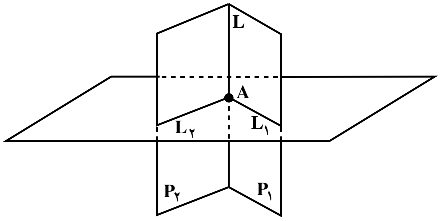


نتیجه ۳ــ دو صفحه عمود بر یک خط، با هم موازیند.[4]



۱ــ اثبات در پیوست

۲ــ اثبات ۲، ۳ و ۴ در پیوست



مسأله ۱: از نقطه A روی خط L، صفحه‌ای بر خط L عمود کنید.

حل: می‌توانیم از خط L بیشمار صفحه بگذرانیم. دو صفحه متمایز از این صفحه‌ها را P_1 و P_2 می‌نامیم. از نقطه A در صفحه P_1، خط L_1 را عمود بر L رسم می‌کنیم. به طور مشابه، از نقطه A در صفحه P_2، خط L_2 را عمود بر L رسم می‌کنیم.

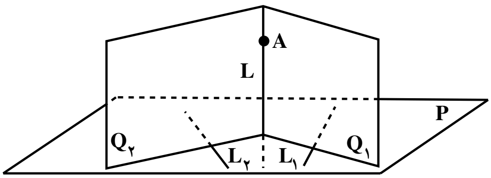
خطهای L_1 و L_2 متقاطعند و خط L بر هر دوی آنها عمود است. طبق **قضیه اساسی تعامد،** خط L بر صفحه گذرنده از L_1 و L_2 نیز عمود است. این صفحه، همان صفحه مطلوب است.

تمرین ــ از نقطه A خارج از خط L، یک صفحه عمود بر L، بگذرانید. ثابت کنید این صفحه یکتاست.

راهنمایی: به نتیجه ۳ توجه کنید.

بنابراین، نتیجه مهم زیر به دست می‌آید.

> از هر نقطه مانند A در فضا، **یک و تنها یک** صفحه می‌گذرد که بر خطی مانند L عمود باشد.

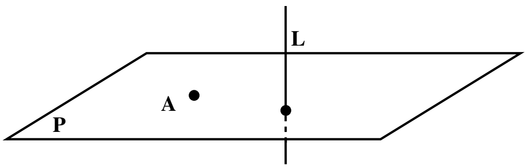


مسأله ۲: از نقطه A خطی رسم کنید که بر صفحه P عمود باشد.

حل: دو خط غیرموازی L_1 و L_2 را در صفحه P در نظر بگیرید. از نقطه A صفحه Q_1 را عمود بر L_1 و صفحه Q_2 را عمود بر L_2 رسم کنید. این دو صفحه متقاطعند ؛ فصل مشترک آنها را L بنامید. طبق قضیه اساسی تعامد، L بر صفحه P عمود است و L همان خط مطلوب است.

طبق نتیجه(۲)،این خط یکتاست، و نتیجه زیر برقرار است.

> از هر نقطه مانند A در فضا، **یک و تنها یک** خط می‌گذرد که بر صفحه‌ای مانند P عمود باشد.



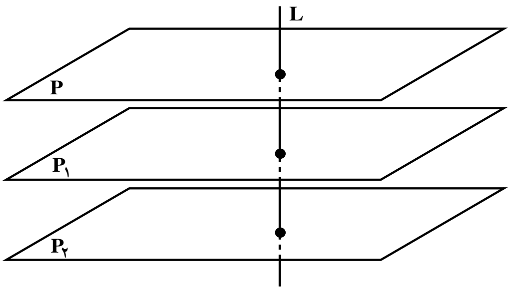
توضیح: با توجه به مسأله ۱ و یکتایی صفحه، در می‌یابیم که یک صفحه در فضا را به صورت زیر نیز، می‌توان مشخص کرد.

هر صفحه، با یک نقطه از آن، و یک خط عمود بر آن، مشخص می‌شود.

۴ــ۳ــ۲ــ کاربرد تعامد در حل مسأله‌های توازی

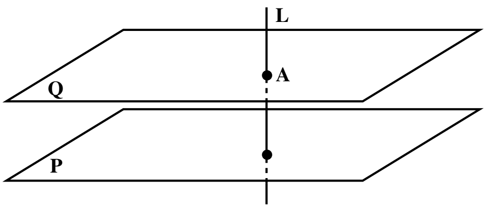
قضیه‌ها و نتیجه‌های این بخش، کمک می‌کنند تا بسیاری از مسأله‌هایی را که در **بخش خطها و صفحه‌های موازی** با آنها آشنا شده‌اید، با استفاده از **تعامد** حل کنید. برای نشان‌دادن این مطلب، سه مثال زیر را که قبلاً در بخش **خطها و صفحه‌های موازی** آنها را دیده‌اید، در نظر بگیرید. اکنون، این سه مثال را مجدداً، با کمک مطالب این بخش، حل می‌کنیم. لازم به توضیح است که حل این سه مثال **مستقل** از اثبات آنها در آن بخش است.

مثال ۱: اگر صفحه P با دو صفحه P_1 و P_2 موازی باشد، دو صفحه P_1 و P_2 نیز با هم موازیند.



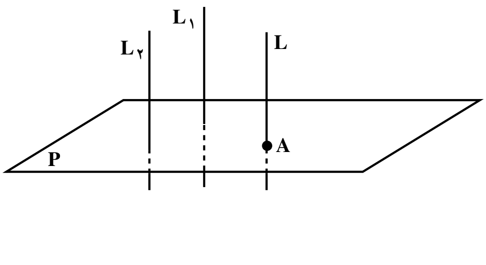
حل: خط L را بر صفحه P عمود می‌کنیم. L بر P_1 و P_2 نیز عمود می‌شود. پس، دو صفحه P_1 و P_2 بر یک خط عمودند. بنابراین با هم موازیند.

مثال ۲: از نقطه A خارج از صفحه P، یک صفحه موازی P می‌گذرد.



حل: از نقطه A خط L را عمود بر P رسم می‌کنیم. سپس، از نقطه A، صفحه Q را عمود بر L رسم می‌کنیم. دو صفحه P و Q هر دو بر خط L عمودند، بنابراین با هم موازیند.

مثال ۳: اگر خط L با دو خط L_1 و L_2 موازی باشد، دو خط L_1 و L_2 نیز با هم موازیند.

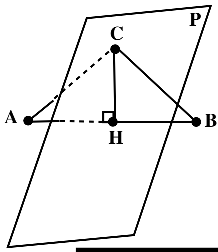


حل: صفحه P را بر خط L عمود می‌کنیم. P بر L_1 و L_2 نیز عمود می‌شود. پس، دو خط L_1 و L_2 بر یک صفحه عمودند، بنابراین با هم موازیند.

۴ــ۳ــ۳ــ صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط

عمودمنصف یک پاره‌خط، در صفحه، خطی است که در وسط آن پاره‌خط بر آن عمود باشد. به‌طور مشابه، صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط در فضا، تعریف می‌شود.

> صفحه‌ای را که در وسط یک پاره‌خط، بر آن عمود باشد، صفحه عمودمنصف آن پاره‌خط، می‌نامیم.

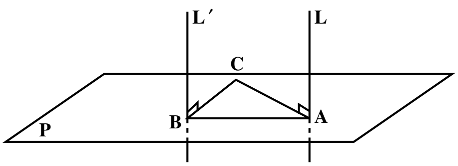


در فصل ۱ ثابت کردیم که عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند. برای صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط در فضا نیز، همین حکم برقرار است.

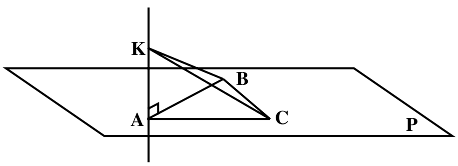
> صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا است که از دو سر آن پاره‌خط، به یک فاصله‌اند[1].

مسأله‌ها

۱. ثابت کنید که در یک مکعب مستطیل هر یال در دو وجه قرار دارد، و با دو وجه موازی است، و بر دو وجه عمود است.



۲. فرض کنید L و ′L دو خط موازی باشند که صفحه P را به ترتیب در نقاط A و B قطع کنند. اگر C نقطه‌ای در صفحه P باشد که روی خط AB نباشد و خط L بر خط AC و خط ′L بر خط BC عمود باشد، ثابت کنید دو خط L و ′L بر صفحه P عمودند.



۳. فرض کنید A، B و C سه نقطه از صفحه P باشند که بر یک خط قرار ندارند و $AB = AC$. اگر K نقطه‌ای خارج از صفحه P باشد که $KB = KC$ و خط KA بر خط AB عمود باشد، ثابت کنید خط KA بر صفحه P عمود است.

۴. اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، بر دیگری هم عمود است.

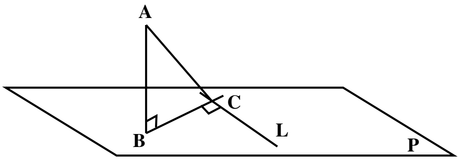
---

[1]ــ اثبات در پیوست

۵. اگر خط L بر صفحه P عمود باشد، هر خطی که بر خط L عمود باشد با صفحه P موازی است.

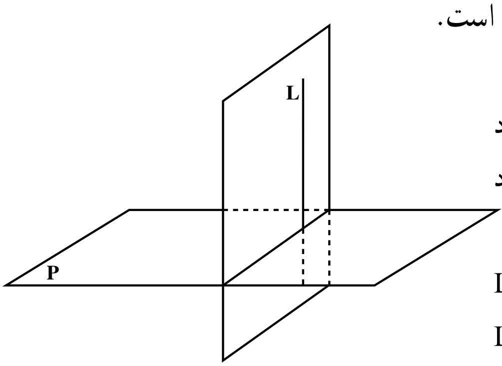
۶. تمام خطهای گذرنده از یک نقطه مانند O و عمود بر یک خط مانند L، در یک صفحه قرار دارند که بر خط L عمود است.

۷. اگر L و L′ دو خط متنافر باشند، از هر نقطه A یک و تنها یک خط می‌گذرد که بر L و L′ عمود است.



۸. فرض کنید L یک خط در صفحه P، و B و C دو نقطه متمایز در صفحه P باشند که خط BC در نقطه C بر خط L عمود باشد. اگر A نقطه‌ای در فضا باشد که خط AB بر صفحه P عمود باشد، ثابت کنید خط AC بر خط L عمود است.

۴ـ۳ـ۴ـ دو صفحه عمود برهم

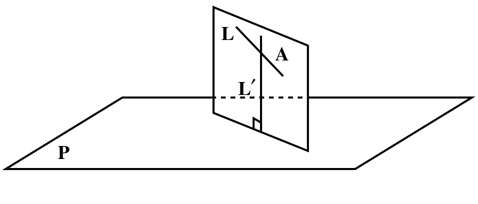


یادآوری از هندسه (۱): دو صفحه را عمود برهم می‌نامیم، هرگاه خطی در یکی از دو صفحه وجود داشته باشد، که بر دیگری عمود باشد.

از این تعریف، نتیجه می‌شود که اگر خط L بر صفحه P عمود باشد، هر صفحه‌ای که از L می‌گذرد، بر صفحه P عمود است.

مثال: در یک مکعب مستطیل، هر دو وجه مجاور آن، برهم عمودند.

قضیه ۷: اگر P و Q دو صفحه عمود برهم باشند، هر کدام شامل خطی است که بر دیگری عمود است[1].

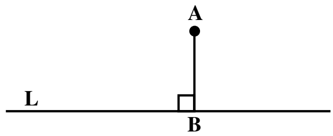


مسأله: اگر خط L بر صفحه P عمود نباشد، صفحه‌ای از خط L بگذرانید که بر P عمود باشد.

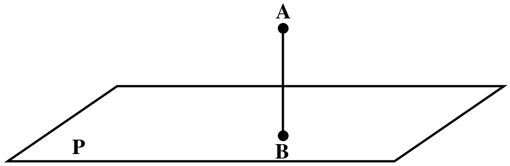
حل: از یک نقطه مانند A روی خط L، خط L′ را عمود بر صفحه P رسم می‌کنیم. L و L′ دو خط متقاطعند و صفحه‌ای که از این دو خط می‌گذرد، جواب مسأله است.

۱ــ اثبات در پیوست

۴ــ۳ــ۵ــ فاصله نقطه از صفحه



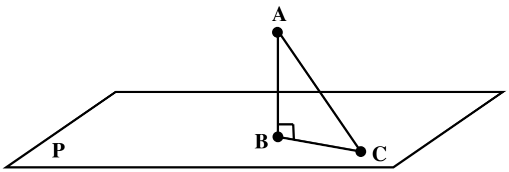
در هندسه مسطحه دیدیم که بنابه تعریف فاصله نقطه A از خط L، طول عمود AB است که از نقطه A بر خط L رسم می‌شود. (شکل روبرو)



در فضا نیز برای هر نقطه مانند A و صفحه‌ای مانند P، خط **یکتایی** از A می‌گذرد که بر P عمود است. اگر محل تلاقی این خط با P را نقطه B بنامیم، طول پاره‌خط AB را **فاصله نقطه A تا صفحه P** تعریف می‌کنیم.

اگر نقطه A در صفحه P باشد، B همان A خواهد بود و فاصله A تا P صفر می‌باشد.

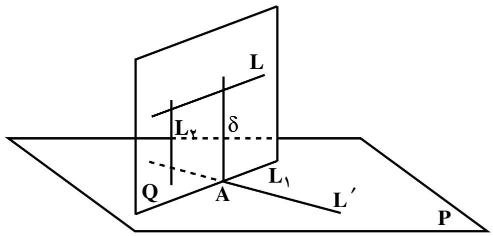
تمرین ــ ثابت کنید که، فاصله یک نقطه از یک صفحه، کوتاهترین فاصله بین آن نقطه تا نقاط آن صفحه است.



۴ــ۳ــ۶ــ عمود مشترک دو خط متنافر

اگر L و L' دو خط متنافر باشند، با روشهای گوناگون می‌توان خطی را به‌دست آورد که آنها را قطع کند و بر آنها عمود باشد. این خط را **عمود مشترک این دو خط متنافر** می‌نامند. یکی از روشهای رسم عمود مشترک دو خط متنافر، روش زیر است.

ابتدا، صفحه P شامل خط L' و موازی خط L را رسم می‌کنیم. سپس، صفحه Q را از L عمود بر صفحه P می‌گذرانیم. طبق قضیه ۱، فصل مشترک دو صفحه P و Q که آن را L_1 می‌نامیم، با خط L موازی است. بنابراین، خطهای L' و L_1 موازی نیستند و چون هر دو در یک صفحه قرار دارند با یکدیگر متقاطع خواهند بود.



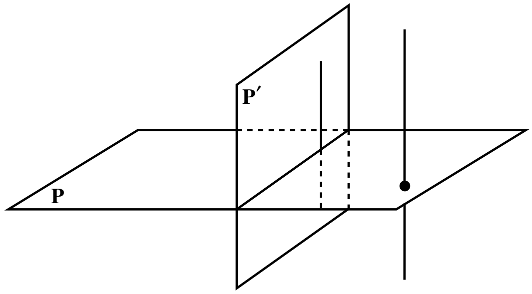
نقطه مشترک دو خط L' و L_1 را A می‌نامیم. از نقطه A، در صفحه Q خط δ را عمود بر خط L_1 و L رسم می‌کنیم. اگر L_2 خطی در Q باشد که بر P عمود است، دو خط δ و L_2 هر دو در صفحه Q قرار دارند و بر خط L_1 عمودند، بنابراین با هم موازیند. بنابراین، خط δ نیز بر صفحه P عمود است. پس، خط δ بر خط L' نیز عمود است. به این ترتیب خط δ بر هر دو خط متنافر L و L' عمود است و با آنها متقاطع نیز می‌باشد.

می‌توان ثابت کرد که عمود مشترک دو خط متنافر **یکتاست** و **کوتاهترین پاره‌خط متکی بر آن دو خط متنافر است**[1].

مسأله‌ها

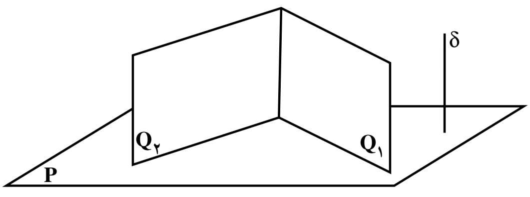
۱. اگر دو صفحه P و P' بر هم عمود باشند، ثابت کنید هر خط عمود بر صفحه P با صفحه P' موازی است.

راهنمایی: صفحه P' دارای یک خط عمود بر صفحه P است.



۲. اگر دو صفحه متقاطع Q_1 و Q_2 بر صفحه P عمود باشند، ثابت کنید فصل مشترک دو صفحه Q_1 و Q_2 بر صفحه P عمود است.

راهنمایی: یک خط δ عمود بر صفحه P در نظر بگیرید. وضعیت خط δ نسبت به دو صفحه Q_1 و Q_2 چگونه است؟

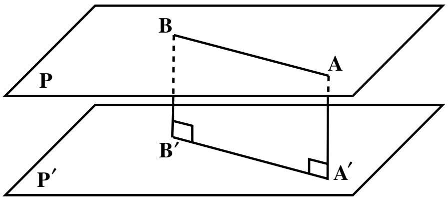


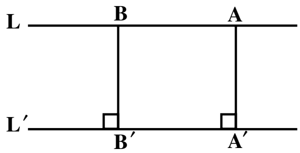
۱ــ اثبات در پیوست

۳. اگر صفحه‌ای بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد بر دیگری هم عمود است.

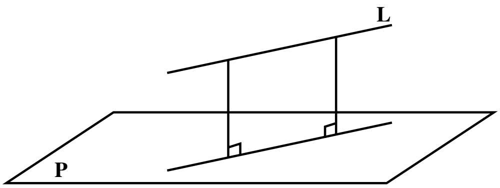
۴. از هر خط L که بر صفحه P عمود نیست یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که بر صفحه P عمود باشد.

۵. در هندسه مسطحه دیدیم، که برای هر دو خط موازی L و L' ، فاصله هر دو نقطه از خط L، تا خط L' یکسان است و این مقدار یکسان را، فاصله دو خط موازی L و L' می‌نامند. ثابت کنید برای دو صفحه موازی P و P' ، فاصله هر دو نقطه از صفحه P، تا صفحه P' برابر است. این مقدار مساوی را فاصله این دو صفحه موازی می‌نامیم.





۶. اگر خط L با صفحه P موازی باشد، ثابت کنید فاصله هر دو نقطه از خط L، تا صفحه P، مساوی است. این مقدار مساوی را فاصله خط L تا صفحه P می‌نامند.



۷. ثابت کنید برای هر عدد $a > 0$ ، مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از یک صفحه مانند P به فاصله a قرار دارند، دو صفحه موازی P است که در دو طرف P قرار دارند و فاصله هر کدام با P، برابر a است.

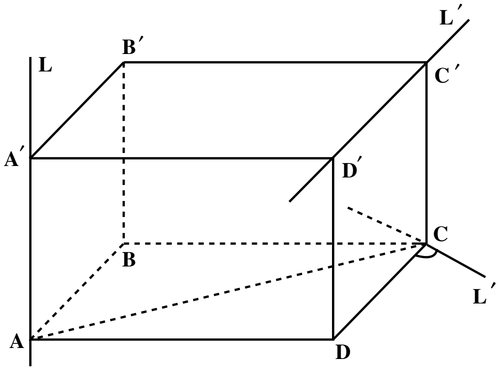
۸. اگر دو نقطه متمایز A و B از صفحه P به یک فاصله، و A و B هر دو در یک طرف P باشند، ثابت کنید خط AB با صفحه P موازی است و اگر A و B در دو طرف P قرار داشته باشند، ثابت کنید صفحه P از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.

۹. در مکعب مستطیل شکل زیر $AB=6$ ، $AA'=8$ و $BC=10$.

الف) خط L با چند خط در این شکل متنافر است، آنها را نام ببرید.

ب) عمود مشترک دو خط متنافر L و 'L که در شکل مشخص شده است، کدام پاره‌خط است؟ طول آن چقدر است؟

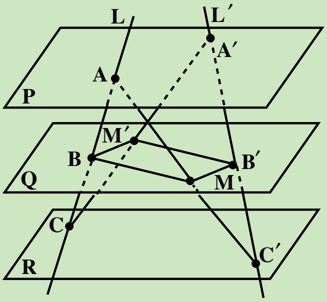
پ) در صفحه ABCD خط 'L را در نقطه C بر خط AC عمود می‌کنیم. عمود مشترک دو خط L و 'L را مشخص کنید و طول آن را به‌دست آورید.



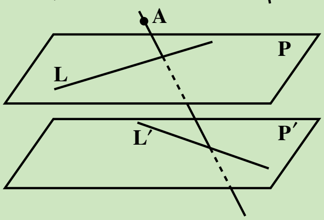
مسأله‌های گوناگون فصل ۴

این مسأله‌ها خارج از برنامه رسمی هندسه ۲ است. دانش‌آموزان علاقه‌مند، خود می‌توانند آنها را حل کنند.

۱. اگر P و Q دو صفحه موازی و متمایز باشند، مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی که یک سر آنها در صفحه P و سر دیگر آنها در صفحه Q قرار دارند را به دست آورید.



۲. دو خط متنافر L و L′ ، سه صفحه موازی و متمایز P، Q و R را طبق شکل روبه‌رو به ترتیب در نقطه‌های A، B و C و A′، B′ و C′ قطع کرده‌اند. اگر خطهای AC′ و A′C صفحه Q را به ترتیب در نقطه‌های M و M′ قطع کرده باشند، ثابت کنید چهارضلعی BMB′M′ متوازی‌الاضلاع است.



۳. اگر خطهای L و L′ متنافر باشند و صفحه P شامل L و موازی L′ و P′ صفحه شامل L′ و موازی L باشد، آنگاه از هر نقطه مانند A خارج از P و P′ یک و تنها یک خط می‌گذرد که با L و L′ متقاطع باشد.

راهنمایی: اگر چنین خطی موجود باشد، این خط در صفحه گذرنده از خط L و نقطه A قرار دارد و این خط از محل تقاطع خط L′ و این صفحه می‌گذرد.

۴. اگر خط L و صفحه P متقاطع باشند، ثابت کنید از یک نقطه مانند A خارج از L، یک و تنها یک خط می‌گذرد که با صفحه P موازی است و با خط L متقاطع است. اگر A روی L باشد چند خط با این ویژگی وجود دارد؟

۵. اگر L یک خط دلخواه و P یک صفحه دلخواه و O نقطه‌ای از P باشد، خطی در P رسم کنید که از O بگذرد و بر L عمود باشد. بنا بر وضعیتهای مختلف بین P و L، مسأله چند جواب دارد؟

۶. برای یک خط دلخواه L و صفحه دلخواه P و نقطه دلخواه O، آیا خطی وجود دارد که از O بگذرد، با P موازی باشد و بر L عمود شود؟ بنا بر وضعیتهای مختلف بین P و L چند جواب وجود دارد؟

۷. اگر A و B دو نقطه متمایز باشند و L خطی در فضا باشد که نقطه‌های A و B روی آن قرار ندارند و بر خط AB عمود نباشد، ثابت کنید یک و تنها یک نقطه روی خط L مانند C وجود دارد، که مثلث CAB در رأس C متساوی‌الساقین باشد. اگر خط L بر خط AB عمود باشد مسأله چند جواب دارد؟

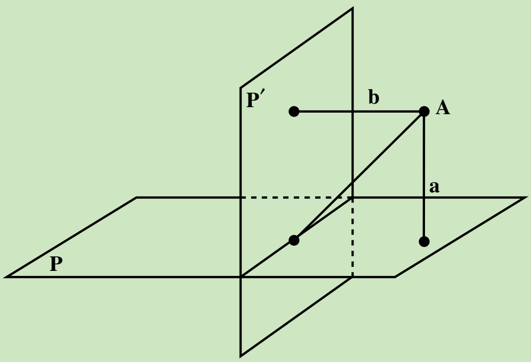
۸. صفحه P، خط L و نقطه A داده شده است. آیا صفحه‌ای وجود دارد که از A بگذرد، با L موازی باشد و بر P عمود شود؟ در وضعیتهای مختلف چند جواب وجود دارد؟

۹. یک صفحه P و یک خط L در آن، و یک خط ′L خارج از P که نقطه اشتراکی با L ندارد، در نظر بگیرید. پاره‌خطی بیابید که دو سر آن روی L و ′L باشد و بر P عمود شود. در وضعیتهای مختلف چند جواب وجود دارد؟

۱۰. اگر دو صفحه P و ′P برهم عمود باشند و از یک نقطه P خط عمودی بر صفحه ′P رسم کنیم، این خط در صفحه P قرار می‌گیرد.

۱۱. برای دو نقطه متمایز A و B و خط L، آیا صفحه‌ای وجود دارد که از L بگذرد و A و B از آن، به یک فاصله باشند؟ در حالات مختلف چند جواب وجود دارد؟

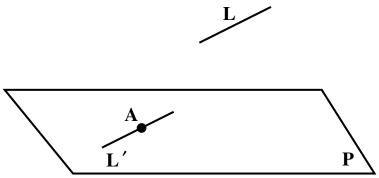
۱۲. اگر دو صفحه P و ′P برهم عمود باشند و نقطه A از P و ′P به ترتیب به فاصله a و b باشد، ثابت کنید فاصله A تا فصل مشترک این دو صفحه، برابر است با $\sqrt{a^2+b^2}$.



پیوست

مطالب پیوست، خارج از برنامه رسمی هندسه ۲ است و تنها برای استفاده دانش‌آموزان علاقه‌مند است.

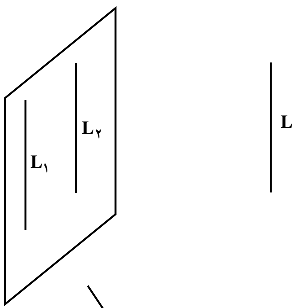
> **قضیه ۳:** اگر خط L با صفحه P موازی و A نقطه‌ای از صفحه P باشد، آنگاه خطی که از A به موازات L رسم می‌شود به تمامی در صفحه P قرار دارد.



برهان: دو حالت وجود دارد :

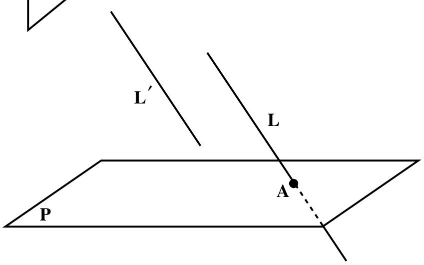
الف) خط L در صفحه P قرار ندارد : در این حالت، ابتدا یک خط L' در صفحه P می‌یابیم که از نقطه A بگذرد و با L موازی باشد. صفحه گذرنده از نقطه A و خط L، طبق قضیه ۱، صفحه P را در خطی موازی L قطع می‌کند که از نقطه A می‌گذرد. این، همان خط موردنظر L' است. حال، طبق اصل توازی اقلیدس فقط یک خط از نقطه A می‌گذرد که با L موازی است. پس، این خط همان L' است و L' نیز در صفحه P قرار دارد.

ب) خط L در صفحه P قرار دارد : در این حالت، اگر نقطه A روی خط L باشد، درستی حکم روشن است و اگر نقطه A خارج از خط L باشد، خط گذرنده از نقطه A به موازات L را L' می‌نامیم. صفحه گذرنده از L و L' با صفحه P در خط L و نقطه A اشتراک دارد، پس، این صفحه همان صفحه P است و خط L' در صفحه P قرار دارد.



نتیجه ۱ــ اگر دو خط با خط سومی موازی باشند، خودشان با هم موازیند.[۱]

راهنمایی: اگر دو خط متمایز L_1 و L_2 با خط L موازی باشند، یک صفحه از خط L_2 و نقطه دلخواهی از L_1 بگذرانید و وضعیت دو خط L_1 و L_2 را نسبت به آن بررسی کنید.



نتیجه ۱ــ اگر صفحه‌ای یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.[۲]

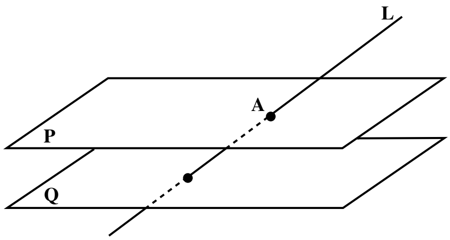
برهان: فرض کنید دو خط L و L' موازیند و خط L با صفحه P در نقطه A متقاطع است. به برهان

۱ــ نتیجهٔ ۱ صفحهٔ ۱۴۰

۲ــ نتیجهٔ ۲ صفحهٔ ۱۴۱

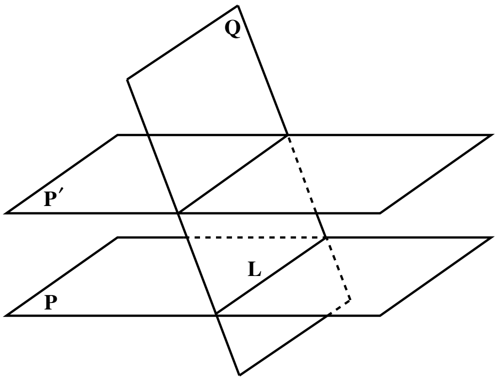
خلف فرض کنید L' با صفحه P موازی باشد. در این صورت، خطی که از A به موازات L' می‌گذرد، به تمامی در صفحه P قرار خواهد داشت. این خط، همان L است، یعنی خط L به تمامی در صفحه P است که خلاف فرض است.

نتیجه ۲ــ اگر خطی یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.



برهان: فرض کنید P و Q دو صفحه متمایز موازی باشند و خط L صفحه P را فقط در نقطه‌ای مانند A قطع کرده باشد. به برهان خلف، فرض کنید خط L صفحه Q را قطع نکند، پس با آن موازی است. طبق قضیه ۱، یک خط مانند L' در صفحه Q وجود دارد که با L موازی است. خط L' صفحه P را قطع نمی‌کند، پس با آن موازی است. بنابراین، L خطی است که از یک نقطه صفحه P می‌گذرد و موازی خطی است که با صفحه P موازی است. در نتیجه، خط L به تمامی در صفحه P قرار می‌گیرد که خلاف فرض است.

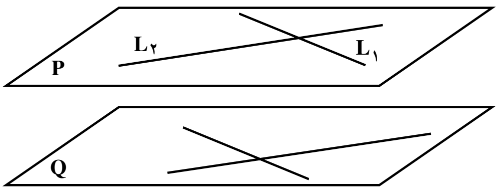
نتیجه ۳ــ اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند و فصل مشترکها با هم موازیند.



برهان: فرض کنید دو صفحه P و P' موازیند و نقطه مشترکی ندارند و صفحه Q با صفحه P متقاطع است و فصل مشترک آنها خط L می‌باشد. در صفحه Q یک خط L' متقاطع با L در نظر می‌گیریم. L' خطی است که با صفحه P متقاطع است، پس طبق نتیجه ۲، L' صفحه P' را قطع می‌کند. در نتیجه صفحه Q، صفحه P' را قطع می‌کند.

فصل مشترکهای این صفحه‌ها دو خط هستند که هر دو در صفحه Q هستند و همدیگر را قطع نمی‌کنند. چرا؟ پس با هم موازیند.

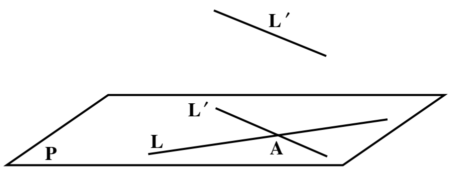
قضیه ۴: اگر دو خط متقاطع از صفحه‌ای با دو خط متقاطع از صفحه دیگری موازی باشند، آن دو صفحه موازیند.



برهان: فرض کنید P و Q دو صفحه متمایز و L_1 و L_2 دو خط متقاطع در صفحه P باشند که با دو خط از صفحه Q موازیند. بنابراین، L_1 و L_2 با صفحه Q موازیند و آن را قطع نمی‌کنند. چرا؟

به برهان خلف فرض کنید دو صفحه P و Q موازی نیستند و فصل مشترک آنها، خطی مانند L باشد. L خطی در صفحه P است و حداقل یکی از دو خط L_1 و L_2 را قطع می‌کند. چرا؟ پس، حداقل یکی از دو خط L_1 و L_2 صفحه Q را قطع می‌کند که خلاف فرض است.

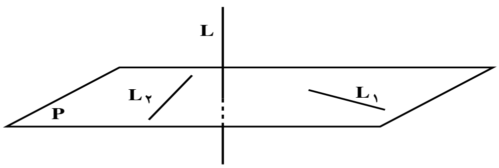
نتیجه ـــ اگر L و L' دو خط متنافر باشند، صفحه یکتایی وجود دارد که بر L می‌گذرد و با L' موازی است.



برهان: از یک نقطه L مانند A، خط L' را به موازات L' رسم می‌کنیم. اگر P صفحه گذرنده از دو خط L و L' باشد، صفحه P بر خط L می‌گذرد و با L' موازی است.

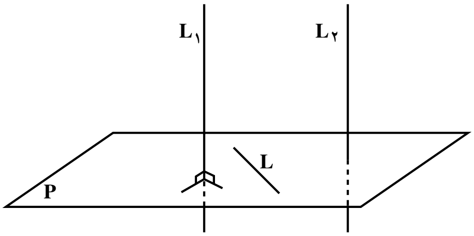
اگر Q صفحه دیگری باشد که بر L گذشته و با L' موازی است، خط L' نیز در صفحه Q قرار دارد. چرا؟ پس، Q بر P منطبق است و تنها یک صفحه وجود دارد که بر خط L می‌گذرد و با L' موازی است.

> **قضیه:** اگر خطی بر دو خط غیرموازی از صفحه‌ای عمود باشد، با آن صفحه متقاطع است.



برهان: فرض کنید خط L بر دو خط غیرموازی L_1 و L_2 از صفحه P عمود باشد. به برهان خلف فرض کنید خط L صفحه P را قطع نکند، پس با آن موازی است. خط مانند L' در صفحه P وجود دارد که با L موازی باشد. L' نیز بر L_1 و L_2 عمود است. از آنجا که L_1 و L_2 به عنوان دو خط در صفحه P بر خطی از همان صفحه P عمودند، با هم موازیند که خلاف فرض است.

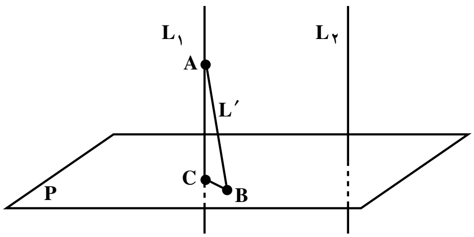
نتیجه ۱ــ اگر یکی از دو خط موازی بر یک صفحه عمود باشد، دیگری هم بر آن صفحه عمود است.



برهان: فرض کنید L_1 و L_2 دو خط موازی باشند و خط L_1 بر صفحه‌ای چون P عمود است. اگر L خطی در صفحه P باشد، L_1 بر L عمود است، پس، L_2 نیز بر L عمود است. بنابراین، خط L_2 بر همه خطهای صفحه P عمود است و در نتیجه L_2 نیز بر P عمود است.

نتیجه ۲ــ دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازیند.

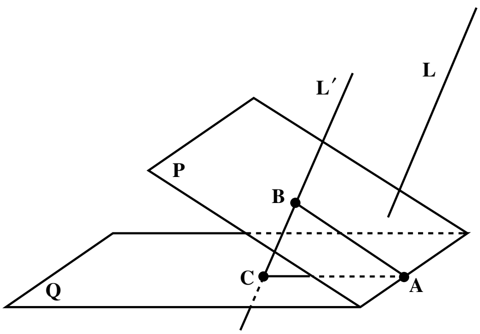
برهان: فرض کنید دو خط L_1 و L_2 بر صفحه P عمود باشند. به برهان خلف فرض کنید این دو خط موازی نباشند. از یک نقطه مانند A روی خط L_1 و خارج از صفحه P خط L' را به موازات L_2 می‌گذرانیم. دو خط L' و L_1 متمایزند و صفحه P را به ترتیب در دو نقطه متمایز مانند B و C قطع می‌کنند. خط L' نیز بر صفحه P عمود است. چرا؟



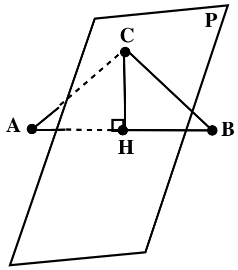
پس، مثلث ABC در هر دو رأس B و C قائمه‌الزاویه است که این، ممکن نیست.

نتیجه ۳ــ دو صفحه عمود بر یک خط با هم موازیند.

برهان: فرض کنید دو صفحه مانند P و Q هر دو بر خطی مانند L عمود باشند. به برهان خلف فرض کنید دو صفحه P و Q موازی نباشند و یک نقطه مشترک مانند A داشته باشند. یک نقطه مانند B روی صفحه P خارج از صفحه Q انتخاب می‌کنیم. از نقطه B خطی موازی L رسم می‌کنیم و L' می‌نامیم. خط L' بر دو صفحه P و Q عمود است و صفحه Q را در نقطه‌ای مانند C قطع می‌کند. سه نقطه A ، B و C متمایزند و بر یک خط قرار ندارند. چرا؟ پس، مثلث ABC در دو رأس B و C قائمه‌الزاویه است که این ممکن نیست.



قضیه صفحه عمود منصف: صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقاطی از فضا است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

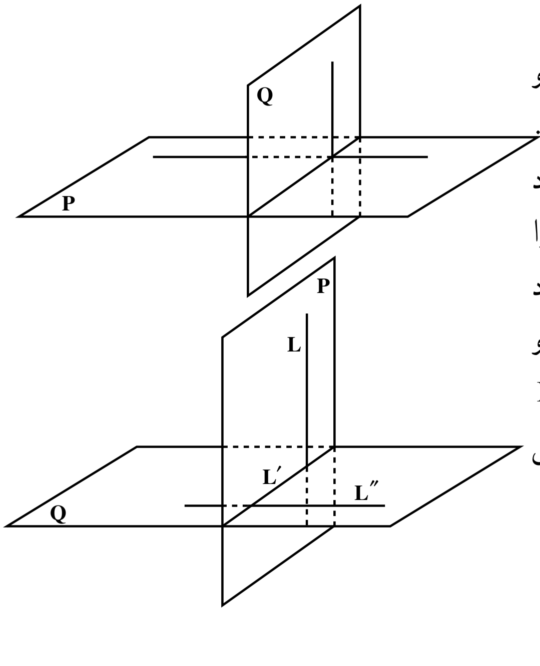


برهان: فرض کنید A و B دو نقطه متمایز در فضا و P صفحه عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. وسط پاره‌خط AB را نقطه H می‌نامیم.

اگر C نقطه‌ای از این صفحه و متمایز از H باشد، در صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد، خط CH، عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس، $AC = BC$.

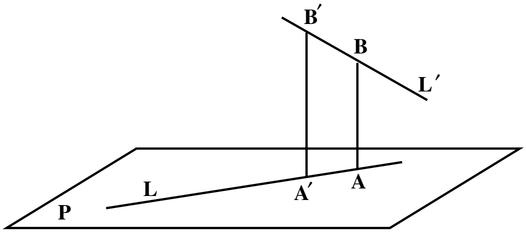
برعکس، فرض کنید، C' نقطه‌ای از فضا باشد که $AC' = BC'$. در این صورت مثلث ABC' در رأس C' متساوی‌الساقین، و خط $C'H$ بر پاره‌خط AB عمود است. با انتخاب خط دلخواهی از صفحه P که از نقطه H بگذرد و با خط $C'H$ موازی نباشد، صفحه گذرنده از این خط و نقطه C' را Q می‌نامیم. پاره‌خط AB بر دو خط غیرموازی Q عمود است، چرا؟ پس، AB بر هر دو صفحه P و Q در نقطه H عمود است. طبق یکتایی چنین صفحه‌ای، دو صفحه P و Q یکی هستند. پس، نقطه C' در صفحه P است.

قضیه ۷: اگر P و Q دو صفحه عمود بر هم باشند، هرکدام شامل خطی است که بر دیگری عمود است.



برهان: طبق تعریف یکی از این دو صفحه شامل خطی عمود بر دیگری است. فرض کنید L خطی در P باشد که بر Q عمود است. فصل مشترک دو صفحه P و Q را L' می‌نامیم. در صفحه Q خط L'' را عمود بر L' رسم می‌کنیم. L بر L'' عمود است و در نتیجه L'' بر دو خط غیرموازی L و L' از صفحه P عمود است. بنابراین، L'' خطی از صفحه Q است که بر P عمود است.

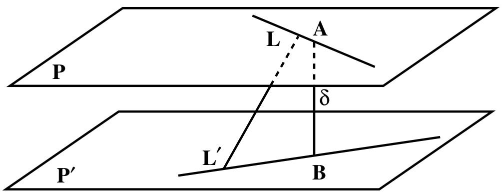
قضیه : عمود مشترک دو خط متنافر یکتا است.



برهان: به برهان خلف، برای دو خط متنافر L و ′L دو عمود مشترک مانند AB و ′A′B در نظر بگیرید. اگر P صفحه‌ای باشد که با L و ′L موازی است، هر دو خط AB و ′A′B بر آن عمودند، پس با هم موازیند. در نتیجه، چهار ضلعی ′ABB′A در یک صفحه قرار دارد و یک مستطیل است. بنابراین، خطهای ′AA و ′BB با هم موازیند. اما، این دو خط، همان L و ′L هستند که با هم متنافرند و این خلاف فرض است.

قضیه : اگر L و ′L دو خط متنافر و δ عمود مشترک این دو خط باشد که آنها را در نقاط A و B قطع می‌کند، AB کوتاهترین پاره‌خطی است که یک سر آن روی L و سر دیگر آن روی ′L است.

راهنمایی: دو صفحه P و ′P به ترتیب شامل L و ′L به گونه‌ای رسم کنید که با هم موازی باشند. طول پاره‌خط AB همان فاصله P و ′P است. طول بقیه پاره‌خطهایی که رأسهای آنها روی L و ′L قرار دارند چه رابطه‌ای با فاصله بین P و ′P دارند؟



منابع

1.Billstein R. , Libeskind, S. Lott J. , **A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers,** (2rd ed.) Benjamin Cummings Publish. Co. 1984.

2. Chazan, D.& Houde, R. (1989). **How to Use Conjecturing and Microcomputers to Teach Geometry.** National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

3. Howson, G.(1995). **Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts.** The Third International Mathematics and Science Study: TIMSS. Monograph No. 3. Pacific Educational Press, Vancouver, CANADA.

4. ICMI (The International Commission on Mathematics Instruction) (1995). Perspectives on teaching of geometry for the 21 st century. **Educational Studies in Mathematics,** 28, 91-98.

5. Jacobs, H.R. (1974). **Geometry.** W.H. Freeman & Company.

6. Kalin, R. & Corbitt, M. K. (1990). **Gemetry: Teachers' Edition.** Prentice Hall, NJ.

7. Kelly, B. (1987). **MATHQUEST Six.** Addison Wesley Publishers Limited.

8. Kelly, B. , Alexander, B. & Atkinson, P. (1987). **Mathematics 10.** Addison Wesley Pub. Ltd.

9. Kindt, M. & etal. (1996) (eds.). **Working Group 13; 8th International Congress on Mathematics Education: Curriculum Changs in the Secondary School.** Freudenthal Institute, The Netherlands.

10. Lang, S. Murrow, G. (1988). **Geometry: A High School Course,** 2nd ed. Springer-Verlag.

11. Lewis, Harry. (1964). Geometry A contemporary course. D.Van Nostrand.

12. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,** Reston, VA: Author.

13. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). **Geometry**

from Multiple Perspectives: Addenda Series, Grades 9-12: Author.

14. Steen, L. A. (1994) (ed.). **For all Practical Purposes: Introduction to Contemporary Mathematics** (3rd Ed.). COMAP, Inc.

15. Usiskin, Z. & etal. (1996). **The University of Chicago School Mathematics Project (UCSMP) GEOMETRY Scott foresman integrated mathematics (2nd Ed.).** Field Test Version. Scott Foresman.

16. Welchons, A. M. , Krickenberger, W. R. , Pearson & H. R. (1976). **Plane Geometry.** Ginn & Company.

17. Wheeler, R.E.(1984). **Modern mathematics: An elementary approach** (6th Ed.).

۱۸. السجزی، عبدالجلیل، **رسالهٔ سجزی در روشهای حل مسایل هندسی.** ترجمهٔ محمد باقری (۱۳۷۵). انتشارات فاطمی، تهران.

۱۹. بوزجانی ابوالوفا. **هندسهٔ ایرانی: کاربرد هندسه در عمل.** برگردان به عبارت روز و گردآوری ضمیمه از : سیدعلیرضا جذبی، انتشارات سروش، تهران، ۱۳۶۹.

۲۰. بیرشک،احمد، معیری، طاهر. جزوهٔ تکمیلی هندسه۲، وزارت آموزش و پرورش (۱۳۷۶).

۲۱. پولیا، جورج. (۱۹۶۲). **خلاقیّت ریاضی،** ترجمهٔ پرویز شهریاری (۱۳۷۳). چاپ دوم. انتشارات فاطمی، تهران.

۲۲. دانز و موئیز (۱۳۷۳). هندسه (مترجم : محمود دیانی)، انتشارات فاطمی، تهران.

۲۳. **در باب برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان،** ترجمهٔ جواد حاجی‌بابایی (۱۳۷۵).
رشد آموزش ریاضی، شماره ۴۶، انتشارات دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی.

۲۴. رستمی، محمدهاشم. دایرة المعارف هندسه، جلد ۱۴، هندسهٔ فضایی. انتشارات مدرسه، (۱۳۸۲).

۲۵. صفاری، حسن، قربانی ابوالقاسم، هندسه برای سال پنجم دبیرستانها، چاپخانه علی‌اکبر علمی (۱۳۳۰).

۲۶. ظهوری زنگنه، بیژن، گویا، زهرا. **دیدگاههای نوین آموزش هندسه،** گزارش کارگاه آموزش ریاضی، بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور، دانشگاه شهید باهنر کرمان، فروردین ۱۳۷۴.